



University Of Qom



Developing Relationships for Determining the Optimal Shape Parameter in the Multiquadric Meshless Method

Hanieh Talebi Kalan¹, Sara Mohsenzadeh Golafzani², Reza Babaei³,
Ehsan Jabbari⁴

1. Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran. E-mail: hanie-talebi-kalan@outlook.com
2. Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran. E-mail: saramhi20@gmail.com
3. Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran. E-mail: r.babaei@qom.ac.ir
4. Corresponding author, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran. E-mail: e.jabbari@qom.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received 22 Jan 2025
Revised 21 Apr 2025
Accepted 26 Apr 2025
Published 13 May 2025

Keywords:
Meshless method,
Radial Basis Function
(RBF),
Multiquadric method,
Shape parameter,
Burgers' equation,
Advection-diffusion
equation.

ABSTRACT

The accuracy and efficiency of the Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF) method are highly sensitive to the choice of the shape parameter. This study aims to identify optimal relationships for determining the shape parameter in solving common partial differential equations (PDEs) encountered in water engineering. To this end, the procedure for reconstructing and solving PDEs using the MQ-RBF method is first outlined. Then, optimal values for the shape parameter are derived based on domain length and the number of computational centers. Based on these findings, empirical formulas for the optimal shape parameter are proposed, which significantly reduce computational cost. The performance of the proposed formulas is compared with exact solutions and existing empirical relations. Results show that, unlike previous approaches, the new formulas offer high accuracy, with negligible errors across different examples—sometimes approaching zero. Moreover, compared to optimization-based techniques, the proposed method dramatically improves computational speed by eliminating the need for iterative algorithms. The study also investigates stability conditions, showing that for diffusion, advection-diffusion, and Burgers' equations, the maximum allowable time step depends on the diffusion coefficient, flow velocity, and Reynolds number.

Cite this article: Talebi Kalan H, Mohsenzadeh Golafzani S, Babaei R, Jabbari E. Developing Relationships for Determining the Optimal Shape Parameter in the Multiquadric Meshless Method. Civil Infrastructure Researches. 2025; 11(1): 69-86. <https://doi.org/10.22091/cer.2025.12181.1598>



Introduction

The Multiquadric (MQ) method is recognized as one of the mesh-free numerical techniques based on Radial Basis Functions (RBFs). Kansa was the first to employ this method for solving equations in computational fluid dynamics, demonstrating that its accuracy is highly sensitive to the choice of the shape parameter. Subsequently, Mirabi et al. assessed the MQ-RBF approach for solving the Navier–Stokes equations and standard turbulence models in a two-dimensional setting. Babaee et al. extended the application of the MQ-RBF method to the dynamic interaction of gravity dams in the frequency domain. Ongoing advancements in the development of the MQ method have further facilitated its use in two- and three-dimensional boundary value problems.

The accuracy and efficiency of MQ-RBFs depend critically on the strategy adopted for selecting the optimal shape parameter. Although numerous approaches have been proposed, no strong theoretical consensus has yet been established. For example, Babaee et al. formulated expressions for the optimal shape parameter in solving the Helmholtz equation. Fallah et al. introduced an optimization algorithm based on iterative halving of the parameter range for two- and three-dimensional seepage problems. Kahid Basiri et al. developed a mesh-free MQ method for addressing the dam-break problem and showed that the computed shape parameter remained optimal for subsequent time steps. Moreover, Babaee et al. demonstrated that, in the seismic analysis of dam–reservoir–foundation systems, the optimal shape parameter is independent of subdomain count, stiffness ratio, and fluid compressibility. More recently, adaptive approaches have been introduced to determine the shape parameter, aiming to further enhance the accuracy of the MQ method in solving complex partial differential equations (PDEs).

In the present study, the MQ-RBF method is employed to solve the Laplace, diffusion, advection–diffusion, and Burgers’ equations. To this end, the governing equations are reformulated using the MQ function, and the

corresponding solution procedure is presented. Through these examples, it is first shown that commonly used formulas fail to provide consistent accuracy. Accordingly, new relationships are proposed for determining the optimal shape parameter, ensuring high accuracy across all subsequent time steps. The validity of the proposed approach is demonstrated through several numerical examples, whose results are compared with the exact analytical solutions.

Governing Equations

Laplace Equation

The one-dimensional Laplace equation is expressed as:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

Here, x is the spatial variable and h is the unknown function, which, for example in seepage phenomena, represents the hydraulic head (water pressure) of flow.

Diffusion-Advection Equation

The unsteady one-dimensional governing equation for pollutant advection-diffusion is:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + V \frac{\partial \xi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2)$$

In this equation, ξ is the pollutant concentration, t is time, V is flow velocity, and D is the diffusion coefficient.

Burgers’ Equation

The Burgers equation is considered the simplest nonlinear mathematical model for combining advection and diffusion mechanisms in wave mechanics. It is given as:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

Where u is the velocity and R is the Reynolds number of the flow. It is noteworthy that the Reynolds number is always positive.

Stability Condition Analysis

A key question in solving unsteady problems using any numerical method—including the MQ method—is whether a stability condition exists for the solution process. To address this, the maximum allowable time step that does not cause

instability in the solutions was determined empirically, and its variations with respect to constant coefficients in the equations were plotted. The investigations showed that in the diffusion equation, the maximum time step is directly related to the diffusion coefficient. In the advection-diffusion equation, the maximum time step has a direct and inverse relationship with the diffusion coefficient and velocity, respectively. Also, in the numerical solution of the Burgers equation, the Reynolds number has a direct relationship with the maximum allowable time step.

The results indicated that there is a certain time step value beyond which instability appears in the solutions, suggesting the presence of a stability condition—similar to grid-based methods—which requires further investigation to be fully defined.

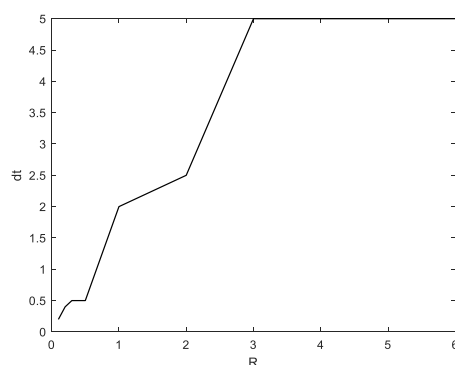


Fig. 1: Reynolds number variations in Burgers' equation in respect to maximum time step for $t = 10$, $N = 10$, and $L = 2$.

Conclusion

In this study, new relationships were proposed for calculating the optimal shape parameter as a function of the domain length and number of computational centers. The results showed that these relationships are optimal and highly accurate for all time steps. This method can also be implemented for equations with higher dimensions or more independent variables, as well as for different or inhomogeneous boundary conditions.

It is also noted that the derived relationships are valid for uniformly distributed points, and different relationships would be required if the point distribution or spacing changes.

Additionally, this study demonstrated that the choice of time step size is dependent on the Reynolds number, diffusion coefficient, and velocity. To achieve accurate results, the time step should be increased with rising Reynolds number and diffusion coefficient, and decreased with increasing velocity. These findings highlight that the MQ method algorithm for solving linear and nonlinear equations in engineering sciences requires a stability condition, which could be the focus of future research.

Funding Statement

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Declaration of Competing Interest

■ **Editorial role disclosure:** The author is an Editorial Board Member for *Civil Infrastructure Researches* and was not involved in the editorial review or the decision to publish this article.

Authors' Contributions

Hanieh Talebi Kalan:

Data curation; Formal analysis; Investigation; Methodology; Resources; Software; Validation; Visualization; Roles/Writing – original draft.

Sara Mohsenzadeh Golafzani:

Data curation; Formal analysis; Investigation; Methodology; Resources; Software; Validation; Visualization; Roles/Writing – original draft.

Reza Babaee:

Conceptualization; Methodology; Project administration; Validation; Roles/ Writing – review & editing.

Ehsan Jabbari:

Conceptualization; Methodology; Supervision; Validation; Roles/ Writing – review & editing



توسعه روابطی برای تعیین متغیر شکل بهینه در روش عددی بدون شبکه چندربعی

هانیه طالبی کلان^۱، سارا محسن‌زاده گل‌افزانی^۲، رضا بابایی^۳، احسان جباری^۴

۱. گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: hanie-talebi-kalan@outlook.com

۲. گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: saramhi20@gmail.com

۳. گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: r.babae@qom.ac.ir

۴. نویسنده مسئول، گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: e.jabbari@qom.ac.ir

چکیده

دقت و سرعت روش پایه شعاعی چندربعی قویاً به روش تعیین متغیر شکل در آن وابسته است. هدف از پژوهش حاضر، جستجوی روابطی برای متغیر شکل بهینه در حل برخی معادلات دیفرانسیل جزئی متداول در مهندسی آب می‌باشد. به این منظور، ابتدا روند بازتولید و حل معادلات با روش چندربعی بیان می‌شود سپس متغیر شکل بهینه برحسب طول دامنه و تعداد مراکز محاسباتی مختلف به دست می‌آید. در ادامه، بر اساس نتایج حاصل‌شده، روابطی برای پارامتر شکل بهینه پیشنهاد می‌شود که حجم محاسبات را به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌دهد. نتایج روابط استخراج‌شده با پاسخ‌های دقیق و روابط پیشین مقایسه گردیده و نشان داده شده است که برخلاف روابط پیشین از دقت بالایی برخوردار هستند به گونه‌ای که در مثال‌ها و معادلات مختلف خطای روابط معرفی شده در مقایسه با روابط موجود بسیار ناچیز و در مواردی در حد صفر است و در مقایسه با روشهای بهینه‌یابی، از آنجائیکه مقدار ضریب شکل بهینه با استفاده از یک رابطه ریاضی به دست می‌آید، سرعت اجرا به دلیل عدم نیاز به الگوریتم تکراری بهینه‌یابی، بسیار بیشتر است. همچنین وجود شرط پایداری در این الگوریتم‌ها مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده گردید که علاوه بر وجود این شرط در معادلات پخش، پخش-انتقال و برگرز، بیشینه گام زمانی به مقدار ضریب پخش، سرعت و عدد رینولدز وابسته است.

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۰۳

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۲/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۰۶

تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۰۲/۲۳

کلیدواژه‌ها:

روش بدون شبکه،

تابع پایه شعاعی،

روش چندربعی،

متغیر شکل،

معادله برگرز،

معادله پخش-انتقال.

استناد: طالبی کلان هانیه، محسن‌زاده گل‌افزانی سارا، بابایی رضا، جباری احسان. توسعه روابطی برای تعیین متغیر شکل بهینه در روش عددی بدون

شبکه چندربعی. پژوهش‌های زیرساخت‌های عمرانی. ۱۴۰۴؛ ۱۱(۱): ۶۹-۸۶. <https://doi.org/10.22091/cer.2025.12181.1598>

۱- مقدمه

روش چندربعی^۱ که معروفترین روش پایه شعاعی است، یکی از روش‌های عددی بدون شبکه محسوب می‌شود که در عین سادگی با داشتن کارایی بالا، گزینه‌ای جذاب در حل مسائل پیچیده هندسی به ویژه در میدان‌های دو و سه بعدی است. استفاده از توابع پایه شعاعی^۲ در حل معادلات دیفرانسیل جزئی در دهه‌های اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته است. این توابع قادر به درون‌یابی داده‌های پراکنده با دقت چشمگیر هستند، حتی زمانی که ناپیوستگی در داده‌ها وجود دارد. روش استفاده از این تابع برای حل معادلات با مشتقات جزئی برای اولین بار توسط کانزا^۳ (۱۹۹۰) معرفی شد. وی از تابع چندربعی برای یافتن پاسخ تقریبی معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی در دینامیک سیالات محاسباتی استفاده کرد و نشان داد که دقت روش معرفی شده بسیار وابسته به متغیر شکل^۴ است [۱]. تاکنون پژوهش‌های زیادی برای توسعه روش چندربعی در حل مسائل مهندسی انجام گرفته و پیشرفت‌های چشمگیری نیز حاصل شده است. اخیراً یک تکنیک کارآمد برای حل عددی بدون شبکه معادله برگرز یک‌بعدی با استفاده از MQ-RBF و نسخه Lie-Group روش اوپلر به ترتیب برای تکنیک گسسته سازی مکان و زمان ارائه و نشان داده شده است که نتایج آن با نتایج موجود مطابقت دارند و الگوریتم پیشنهادی ضمن کارآمدی به راحتی قابل پیاده‌سازی است [۲]. روش گوسی G-RBF نیز اخیراً برای حل جریان ناپایدار آب زیرزمینی به کار گرفته شد و نتایج به دست آمده عملکرد خوب این روش را به عنوان راه‌حلی برای شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی ناپایدار نشان داد [۳]. میرآبی و همکاران (۲۰۲۱) روش تابع پایه شعاعی چندربعی را برای حل معادلات تراکم ناپذیر جریان پایا شامل معادلات پیوستگی، ناویراستوکس و مدل آشفتگی $k-\varepsilon$ استاندارد در یک میدان دوبعدی

ارزیابی نموده و نشان دادند که متغیر شکل مستقل از اعداد رینولدز [۴]. بابایی و همکاران نیز تابع پایه شعاعی MQ-RBF را برای تحلیل اندرکنش دینامیکی سدهای وزنی در حوزه بسامد توسعه داده‌اند [۵، ۶]. ادامه پژوهش‌ها برای توسعه روش چندربعی، به کاربرد این روش در مسائل دو و سه‌بعدی مقدار مرزی تسری یافته است [۷].

دقت و سرعت توابع پایه شعاعی چندربعی شدیداً به سرعت روش تعیین مقدار بهینه متغیر شکل وابسته است. اگرچه، پژوهشگران در تلاش بوده‌اند تا روش‌های مختلفی برای بهینه‌سازی مقدار این متغیر پیشنهاد دهند ولی یک جمع‌بندی نظری چندان قوی برای آن وجود ندارد. در این راستا، گل‌بابایی و همکاران دو راهبرد برای تعیین متغیر شکل بهینه ارائه دادند. اولین راهبرد، ترکیبی از روابط پیشین متغیر شکل است. طبیعت تصادفی و غیرتکه‌ای بودن این راهبرد باعث شده است که معایب روش‌های پیشین را مرتفع کند درحالی‌که از مزایای آن‌ها بهره برده است. راهبرد دوم، الگوریتم باینری است که برای مراکز زوج و فرد، متغیر شکل متفاوتی در نظر می‌گیرد. انتخاب این نوع متغیر شکل باعث می‌شود تا بین ردیف‌های ماتریس ضرایب روش چندربعی تفاوت منطقی ایجاد گردد و از بدحالت شدن آن جلوگیری شود. راهبردهای نامبرده برای یافتن متغیر شکل در حل معادلات لاپلاس با موفقیت استفاده شد [۸]. در سال ۲۰۱۶ نیز روابطی برای متغیر شکل برحسب لگاریتم عدد شرط ماتریس روش چندربعی و تعداد مراکز محاسباتی آن ارائه شد. این روابط در حل مسائل مقدار مرزی نتایج قابل قبولی ارائه داد [۹]. بی‌آزار و همکاران (۲۰۱۶) با استفاده از الگوریتم جدیدی، ضرایب ثابت روابط تجربی متغیر شکل متغیر را تعیین نموده و نشان دادند که این ضرایب، دقت روش چندربعی را افزایش می‌دهد [۱۰]. در سال ۲۰۱۷ یاقوتی و رمضان‌نژاد برای بهینه کردن متغیر شکل با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی از دو نوع داده استفاده کردند. در اولین گونه

⁴ Shape parameter

¹ Multiquadric (MQ)

² Radial Basis Function (RBF)

³ Kansa

داده، فاصله بین مراکز محاسباتی متفاوت و در نوع دیگر یکسان در نظر گرفته شد. این روش برای طراحی پویانمایی‌های دو و سه بعدی استفاده شد و پیکسل‌های به دست آمده نشان دهنده نتایج قابل قبول روش و الگوریتم استفاده شده بود [۱۱]. چن^۵ و همکاران (۲۰۱۸) یک الگوریتم جدید برای یافتن متغیر شکل بهینه ارائه دادند که در آن ابتدا این متغیر برای مسائلی که حل تحلیلی دارند به دست می‌آید، سپس از آن برای مسائل مشابهی که حل تحلیلی ندارند، استفاده می‌شود [۱۲]. در سال ۲۰۱۸ الگوریتمی با دقتی بسیار بالا ارائه شد. که در آن، مسئله با تعداد N و $N-2$ نقطه محاسباتی به ازای متغیر شکل‌های مختلفی حل می‌شود، آنگاه آن متغیر شکلی که کمترین اختلاف بین دو جواب را داشته باشد بهینه خواهد بود [۱۳]. در سال ۲۰۱۹ مطالعه‌ای بر روی توابع چندربعی و چندربعی معکوس انجام شد و برخی از محدودیت‌های غیرضروری آن حذف گردید به گونه‌ای که استفاده از این روش به ویژه برای غیرریاضیدانان، بسیار در ساده‌تر و مفیدتر گردید [۱۴].

بابایی و همکاران (۲۰۱۹) روش تابع پایه شعاعی چندربعی را برای حل معادله هلمهولتز به کار بردند و سپس با ارائه رابطه‌ای برای متغیر شکل بهینه برحسب بسامد بار زلزله، حجم محاسبات را به طور قابل توجهی کاهش دادند [۶]. در سال ۲۰۱۹ نیز با استفاده از الگوریتم ژنتیک، روشی برای یافتن متغیر شکل بهینه برای حل معادله لاپلاس در مسئله تراوش ارائه شد. در این رویکرد متغیر شکل بهینه به دست آمده مستقل از تعداد نقاط محاسباتی به دست می‌آید [۱۵]. فلاح و همکاران (۲۰۱۹) برای اولین بار، روش چندربعی را برای تحلیل تراوش در محیط‌های متخلخل محصور و باز، در دامنه‌های دو و سه بعدی به کار بردند. ایشان هم چنین برای تعیین متغیر شکل بهینه، یک الگوریتم بهینه‌یابی با ایده نصف کردن تکرار بازه متغیر شکل معرفی نمودند که زمان محاسبات را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌داد [۱۶]. کاهید باصیری و همکاران

(۲۰۲۰) روش بدون شبکه چندربعی را برای حل مسئله شکست توسعه و نشان دادند که مقدار متغیر شکل به دست آمده برای حل مسئله در گام‌های زمانی بعدی نیز بهینه می‌باشد [۱۷]. در سال ۲۰۲۲ روش بدون شبکه تابع پایه شعاعی چندربعی برای حل مسائل اندرکنش لرزه‌ای سد- مخزن-پی در حوزه‌ی بسامد توسعه داده شد و مشخص گردید که متغیر شکل بهینه به تعداد زیردامنه‌ها، نسبت سختی سد به پی و تراکم پذیری سیال وابسته نیست [۱۵]. سان^۶ و همکاران (۲۰۲۳) مدلی را جهت انتخاب بهینه متغیر شکل در تابع MQ توسعه دادند که تاثیر مستقیمی بر دقت و پایداری نتایج داشت و برای کاربردهای دقیق در تحلیل داده‌های پیچیده و پراکنده ضروری بود [۱۸]. ایشان همچنین به ارائه یک روش انطباقی برای انتخاب متغیر شکل در حل معادلات انتگرالی پرداخته است که بتواند داده‌های دوبعدی پراکنده را با دقت و انعطاف بیشتری درون‌یابی کند [۱۹]. در سال ۲۰۲۴ نیز الگوریتم‌های یادگیری ماشین برای انتخاب متغیر شکل بهینه در حل معادله برگرز استفاده و به بهبود دقت و سرعت محاسبات در روش MQ پرداخته شده است [۲۰، ۲۱]. جدیداً نیز یک رویکرد انطباقی به انتخاب متغیر شکل برای بهبود حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی پیچیده پرداخته است که هدف آن افزایش دقت روش تفاضل محدود در حل معادلات پیچیده PDE با به کارگیری روش MQRBF و بهبود روش انتخاب متغیر شکل بهینه است [۲۲]. با بررسی مطالعات پیشین می‌توان فهمید که روابط و روش‌های مختلف در تعیین متغیر شکل بهینه با چالش‌هایی همچون؛ هزینه محاسباتی بالا، دقت پایین، همگرا شدن به مقادیر بهینه محلی، تجربی بودن، وابسته بودن به تعداد مراکز محاسباتی یا یک حل دقیق از مسئله، استفاده از روش‌های سعی و خطا به همراه الگوریتم‌های تکراری و ... مواجه هستند.

در این پژوهش، روش عددی بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی برای حل برخی از معادلات خطی و غیرخطی

استفاده است. شکل کلی تابع چندربعی $S(x)$ در حالت یک‌بعدی به صورت زیر است:

$$S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x - x_j)^2 + c^2} \quad (1)$$

در این رابطه N تعداد مراکز محاسباتی و x_j مختصات آن‌ها است. ضرایب مجهول تابع چندربعی (λ_j) با استفاده از ارضای معادله حاکم در مراکز برهم‌نهی به دست می‌آیند. به این منظور یک دستگاه معادلات جبری به صورت زیر تشکیل و حل می‌گردد:

$$[A]_{N \times N} [\lambda]_{N \times 1} = [B]_{N \times 1} \quad (2)$$

که در آن $[A]$ و $[B]$ به ترتیب ماتریس ضرایب و بردار معلومات هستند. در رابطه (۱)، C متغیر شکل بهینه^۹ است که در بخش بعد به آن پرداخته می‌شود.

۳- متغیر شکل بهینه

متغیر شکل به منظور ایجاد پیوستگی یا به عبارت دیگر مشتق‌پذیر شدن توابع پایه شعاعی در توابع آن‌ها لحاظ شده است. با چنین متغیری، جایگذاری انواع مشتقات تابع چندربعی تا هر مرتبه‌ای در معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی حاکم بر پدیده‌های فیزیکی امکان‌پذیر می‌شود و ضرایب مجهول آن (λ_j) به راحتی با اعمال معادله حاکم در هر مرکز برهم‌نهی دلخواه به دست می‌آید. همان‌طور که در بخش مقدمه اشاره شد، تعیین متغیر شکل بهینه یک چالش مهم در بین پژوهشگران در موضوع توابع پایه شعاعی است. اگرچه تاکنون روابط و الگوریتم‌های ارزشمندی برای این متغیر پیشنهاد شده است ولی هنوز یک راه حل جامع برای یافتن آن وجود ندارد.

روابط پیشنهاد شده برای تعیین متغیر شکل بهینه در دو دسته قرار می‌گیرند. در دسته اول یک مقدار ثابت برای تمامی مراکز محاسباتی در نظر گرفته می‌شود و در دسته دوم این مقدار برای مراکز مختلف متغیر است. مهم‌ترین روابط متغیر شکل ثابت به صورت زیر هستند [۸]:

$$c = 1/(0.815d) \quad (3)$$

متداول در مهندسی آب مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۳]. [۲۴]. به این منظور، معادلات حاکم با استفاده از تابع چندربعی بازتولید و روند حل آن بیان می‌گردد. در این مثال‌ها از توزیع یکنواخت نقاط استفاده شده است. موضوع استفاده از توزیع غیریکنواخت نقاط در روش‌های بدون شبکه بحث مفصلی است که در پژوهش‌های دیگری به آن پرداخته شده است [۲۵، ۲۶]. همچنین برای تعیین متغیر شکل بهینه، ضمن نشان دادن ناکارآمدی روابط پرکاربرد پیشین، روابط جدیدی برای تعیین آن در حل معادلات لاپلاس، پخش، پخش-انتقال و برگرز معرفی گردیده است. متغیر شکل بهینه به دست آمده از این روابط، در همه گام‌های زمانی بعدی از دقت بالایی برخوردار است. به منظور صحت‌سنجی روابط پیشنهادی، مثال‌های عددی ارائه گردیده و پاسخ آن‌ها با روش‌های دقیق مقایسه شده است.

۲- روش چندربعی

روش بدون شبکه چندربعی دارای مزایایی همچون؛ (۱) قابلیت بالا در شبیه‌سازی هندسه‌های نامنظم و پیچیده، (۲) توانایی بالا در شبیه‌سازی ناپیوستگی‌های موجود در پاسخ‌ها، (۳) تعمیم آسان به مسائل دو و سه‌بعدی، (۴) عدم تکنیکی، (۵) عدم نیاز به شبکه منظم از خطوط متقاطع و ... است که در آن، برای حل عددی مسائل، دو مجموعه از مراکز محاسبات پراکنده در دامنه و روی مرزها به کار گرفته می‌شود. مجموعه اول مراکز محاسباتی^۷ نامیده می‌شوند که تابع چندربعی با استفاده از آن‌ها تشکیل می‌گردد. مجموعه دوم مراکز برهم‌نهی^۸ هستند که برای ارضای شکل قوی معادلات و شرایط مرزی حاکم به کار می‌روند. در هریک از این دو مجموعه، مراکز هیچ ارتباطی با یکدیگر ندارند و روی شبکه خاصی هم قرار ندارند. به همین دلیل، این روش در تحلیل‌های تطبیق‌پذیر بسیار کارآمد و برای حل مسائل با هندسه‌های پیچیده و مرزهای گوناگون به راحتی قابل

⁹ Optimal shape parameter

⁷ Computational centers

⁸ Colocation centers

جدول ۱- روابط متغیر شکل متغیر [۸].

روش	رابطه
ESP ¹⁰	$C_j = [C_{min}^2 (\frac{C_{max}^2}{C_{min}^2})^{(j-1)(N-1)}]^{0.5}$; $j = 1, \dots, N$
ILSP ¹¹	$C_j = C_{min} + (\frac{C_{max} - C_{min}}{N - 1}) \times j$; $j = 1, \dots, N$
DLSP ¹²	$C_j = C_{max} + (\frac{C_{min} - C_{max}}{N - 1}) \times j$; $j = 1, \dots, N$
RSP ¹³	$C_j = C_{min} + (C_{max} - C_{min}) \times rand(1, N)$; $j = 1, \dots, N$
TSP ¹⁴	$C_j = C_{min} + (C_{max} - C_{min}) \times \sin((j-1)(\pi/2(N-1)))$; $j = 1, \dots, N$
HSP ¹⁵	$C_j = \begin{cases} TSP_j \\ DLSP_j \\ ESP_j \end{cases}$; $j = 1, \dots, N$
BSP ¹⁶	$C_j = \begin{cases} C_{min} & ; j \text{ be odd} \\ C_{max} & ; j \text{ be even} \end{cases}$

برای تعیین متغیر شکل بهینه متناظر با هر N و L در مسائل ناپایا، شرایط اولیه مسئله با تابع چنددرجی درونیابی و متغیر شکلی که دقیقترین تخمین از آن را داشته باشد، به عنوان متغیر شکل بهینه انتخاب می‌گردد. به این منظور، معیار رابطه (۸) یا ریشه میانگین مربعات خطا مورد استفاده قرار می‌شود.

$$Ec_m = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^N [S_m(x_i) - I(x_i)]^2)}{N}} \quad (8)$$

; $m = 1, 2, 3, \dots$

بر این اساس، متغیر شکلی که معیار خطای کمینه را داشته باشد، بهینه است. در رابطه (۸)، I مقادیر شرایط فیزیکی اولیه مسئله را نشان می‌دهد و $S_m(x_i)$ نیز تابع تخمین چنددرجی به ازای متغیر شکل‌های مختلف است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$c = \sqrt{N} / (1.25D) \quad (4)$$

$$c = 2 / \sqrt{N} \quad (5)$$

که در آن

$$d = (1/N) \sum_{i=1}^N d_i \quad (6)$$

و d_i فاصله هر مرکز محاسباتی از نزدیکترین مرکز مجاورش است. D هم قطر کوچکترین دایره‌ای است که همه مراکز محاسباتی در آن قرار می‌گیرد. روابط متغیر شکل متغیر که در پژوهش‌های پیشین آورده شده‌اند، به شرح جدول ۱ می‌باشد.

دقت روابط مذکور بسته به بعد مسئله، زمان، شرایط مرزی و ... متفاوت و هر رابطه برای شرایط خاصی پاسخی قابل قبول ارائه داده است. همچنین در حالت روابط تعیین متغیر شکل متغیر، به دلیل ایجاد اختلافات بیشتر در درایه‌های ماتریس ضرایب، احتمال بدحالت شدن آن بالاتر می‌رود. به علاوه در چنین روابطی تعیین حد پایین و حد بالای متغیرهای شکل همواره یک چالش بوده است. همان‌طور که در مقدمه عنوان شد، الگوریتم‌های کارآمدی نیز برای تعیین متغیر شکل بهینه پیشنهاد شده است که هرکدام دارای نقاط ضعف و قوتی هستند. مهم‌ترین نقطه ضعف مشترک همه این الگوریتم‌ها تحمیل هزینه محاسبات اضافی به حل مسائل می‌باشد.

در پژوهش حاضر، ضمن نمایش ناکارآمدی روابط موجود، روابط جدیدی برای متغیر شکل بهینه برحسب طول دامنه (L) و تعداد مراکز محاسباتی پیشنهاد خواهد شد که شکل کلی آن‌ها به صورت رابطه (۷) می‌باشد.

$$c_{opt} = Z(N, L) \quad (7)$$

که در آن Z یک تابع مشخص است. به این منظور، مسائل با مقادیر مختلف N و L حل می‌شوند و متغیر شکل‌های بهینه نظیر آن‌ها تعیین می‌گردد. سپس بر اساس داده‌های مربوطه، روابط مورد نظر به دست می‌آیند.

¹⁴ Trigonometric shape parameter

¹⁵ Hybrid shape parameter

¹⁶ Binary shape parameter

¹⁰ Exponentially shape parameter

¹¹ Increasing linear shape parameter

¹² Decreasing linear shape parameter

¹³ Random shape parameter

بازتولید معادله لاپلاس با استفاده از مشتق دوم تابع چنددرجی به صورت زیر به دست می آید:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{c^2}{[(x_i - x_j)^2 + c^2]^{3/2}} = 0 \quad (13)$$

$$; i = 2, \dots, N-1$$

همچنین شرایط مرزی مذکور با استفاده از (۱) مطابق با (۱۴) و (۱۵) به صورت زیر است:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x_j)^2 + c^2} = f_1 \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(L - x_j)^2 + c^2} = f_2 \quad (15)$$

معادلات (۱۳) تا (۱۵) به حل یک دستگاه معادلات

جبری $N \times N$ منجر می شوند که با حل آن، ضرایب مجهول λ و در نتیجه تابع تخمین چنددرجی برای محاسبه هد در همه نقاط میدان محاسباتی به دست می آیند.

۴-۲- معادله پخش و انتقال^{۲۰}

معادله ناپایای حاکم بر پدیده پخش و انتقال آلاینده در حالت یک بعدی عبارت است از [۲۷]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + V \frac{\partial \xi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (16)$$

در اینجا، ξ غلظت آلاینده، t زمان، V سرعت جریان و D ضریب پخش است. شرایط مرزی برای رابطه (۱۶) را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\xi(0, t) = f_3(t) ; 0 \leq t \leq T \quad (17)$$

$$\xi(L, t) = f_4(t) ; 0 \leq t \leq T \quad (18)$$

در این روابط، $f_3(t)$ و $f_4(t)$ توابع مشخصی هستند که غلظت آلاینده را در مرزها نشان می دهند. همچنین T زمان نهایی پخش و انتقال آلاینده است. شرایط اولیه در پدیده حاضر نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\xi(x, 0) = f_5(x) ; 0 \leq x \leq L \quad (19)$$

در این معادله، $f_5(x)$ میزان غلظت اولیه آلاینده در طول دامنه مسئله است. برای گسسته سازی جمله زمانی در

$$S_m(x_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c_m^2} \quad (9)$$

$$; i = 1, 2, \dots, N$$

متغیر شکل بهینه برای مسائل پایا نیز با استفاده از الگوریتم مرجع [۱۶] تعیین می گردد. با چنین روندی، روابط پیشنهادی برای متغیر شکل بهینه برای هر طول دامنه از مسئله، با هر تعداد مراکز محاسباتی، دقت قابل قبولی خواهند داشت و هزینه های محاسباتی برای بهینه سازی متغیر شکل از بین می رود.

۴- معادلات و شرایط مرزی حاکم و بازتولید

آن ها با تابع چنددرجی

در این بخش، معادلات منتخب و شرایط مرزی مربوط به هریک معرفی و نحوه بازتولید آن ها بیان می شود. به این منظور، برای بیان عبارت مشتق مکانی، مشتق تابع چنددرجی و برای گسسته سازی جملات زمانی شکل اختلاف محدود پیشرو مورد استفاده قرار می گیرد. به عبارت دیگر، برای حل معادلات ناپایا از ترکیب روش چنددرجی و اختلاف محدود استفاده می گردد.

۴-۱- معادله لاپلاس^{۱۷}

معادله لاپلاس در حالت یک بعدی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

که در آن x متغیر مکان و h تابع مجهول که برای مثال در پدیده تراوش هد^{۱۸} (بار آبی) جریان آب است. شرایط مرزی را در اینجا می توان به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) انتخاب کرد. در این روابط، f_1 و f_2 مقادیر ثابت و مشخصی هستند که با این فرض، شرایط مرزی از نوع دیریکله^{۱۹} خواهند بود. L نیز طول دامنه میدان محاسباتی است.

$$h(0) = f_1 \quad (11)$$

$$h(L) = f_2 \quad (12)$$

¹⁹ Dirichlet

²⁰ Advection-Diffusion equation

¹⁷ Laplace equation

¹⁸ Head

معادله برگرز مشابه بخش ۴-۲ قابل بیان است. یک حالت شبه ضمنی رابطه (۲۴) با فرض گسسته سازی عبارت مکانی با اختلاف پیشرو به صورت زیر بیان می شود:

$$u^{n+1} + \Delta t u^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - \frac{\Delta t}{R} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} = u^n \quad (25)$$

معادله (۲۵) با استفاده از تابع چندربعی به صورت زیر بازنویسی می شود:

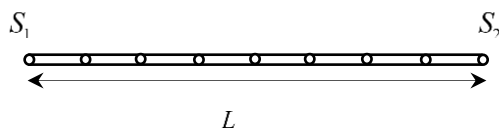
$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \left\{ \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}}{+ \Delta t u^n \frac{(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}}} - \frac{\Delta t}{R} \frac{c^2}{[(x_i - x_j)^2 + c^2]^{3/2}} \right\} = u^n \quad (26)$$

$$; i = 2, 3, \dots, N-1$$

شرایط مرزی نیز مشابه قبل، قابل بازتولید هستند.

۵- مثال های عددی

در این بخش، معادلات بیان شده در بخش قبل به روش تابع پایه شعاعی چندربعی حل می شوند که هندسه کلی میدان محاسباتی آن ها مطابق شکل ۱ است. در این شکل S_1 و S_2 شرایط مرزی مسئله می باشند. به منظور راحتی کاربرد، توزیع مراکز محاسباتی و برهم نهی به صورت یکنواخت انتخاب و به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده اند.



شکل ۱: هندسه کلی و توزیع شماتیک مراکز محاسباتی و برهم نهی در مثال های عددی.

در ادامه، ابتدا ناکافی بودن دقت روابط بیان شده در بخش ۳ برای حل معادلات مذکور نشان داده می شود سپس روابط جدیدی با دقت کافی ارائه خواهد شد. به منظور اثبات ناکارآمدی روابط پیشین و کارآمدی روابط پیشنهادی این

رابطه (۱۶)، از روش اختلاف پیشرو مطابق رابطه زیر استفاده می شود:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} \quad (20)$$

که در آن، n شمارنده گام زمانی است. با ترکیب روابط (۱۶) و (۲۰) و در نظر گرفتن حالت ضمنی معادله حاکم خواهیم داشت:

$$\xi^{n+1} + \Delta t V \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial x} - \Delta t D \frac{\partial^2 \xi^{n+1}}{\partial x^2} = \xi^n \quad (21)$$

معادله (۲۱) با استفاده از تابع چندربعی و مشتق اول و دوم آن به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \left\{ \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}}{+ (\Delta t)(V) \frac{(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}}} - (\Delta t)(D) \frac{c^2}{[(x_i - x_j)^2 + c^2]^{3/2}} \right\} = \xi^n \quad (22)$$

$$; i = 2, 3, \dots, N-1$$

شرایط مرزی نیز مانند بخش ۴-۱ قابل بازنویسی هستند. اگر در رابطه (۱۶) سرعت جریان برابر با صفر قرار گیرد، نتیجه آن معادله پخش (۲۳) خواهد بود که به صورت زیر درمی آید.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (23)$$

۴-۳- معادله برگرز^{۲۱}

معادله برگرز را می توان به عنوان ساده ترین مدل غیرخطی ریاضی برای ترکیب دو عامل پخش و انتقال در حوزه مکانیک امواج به حساب آورد. این معادله به صورت زیر نوشته می شود [۲۸].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (24)$$

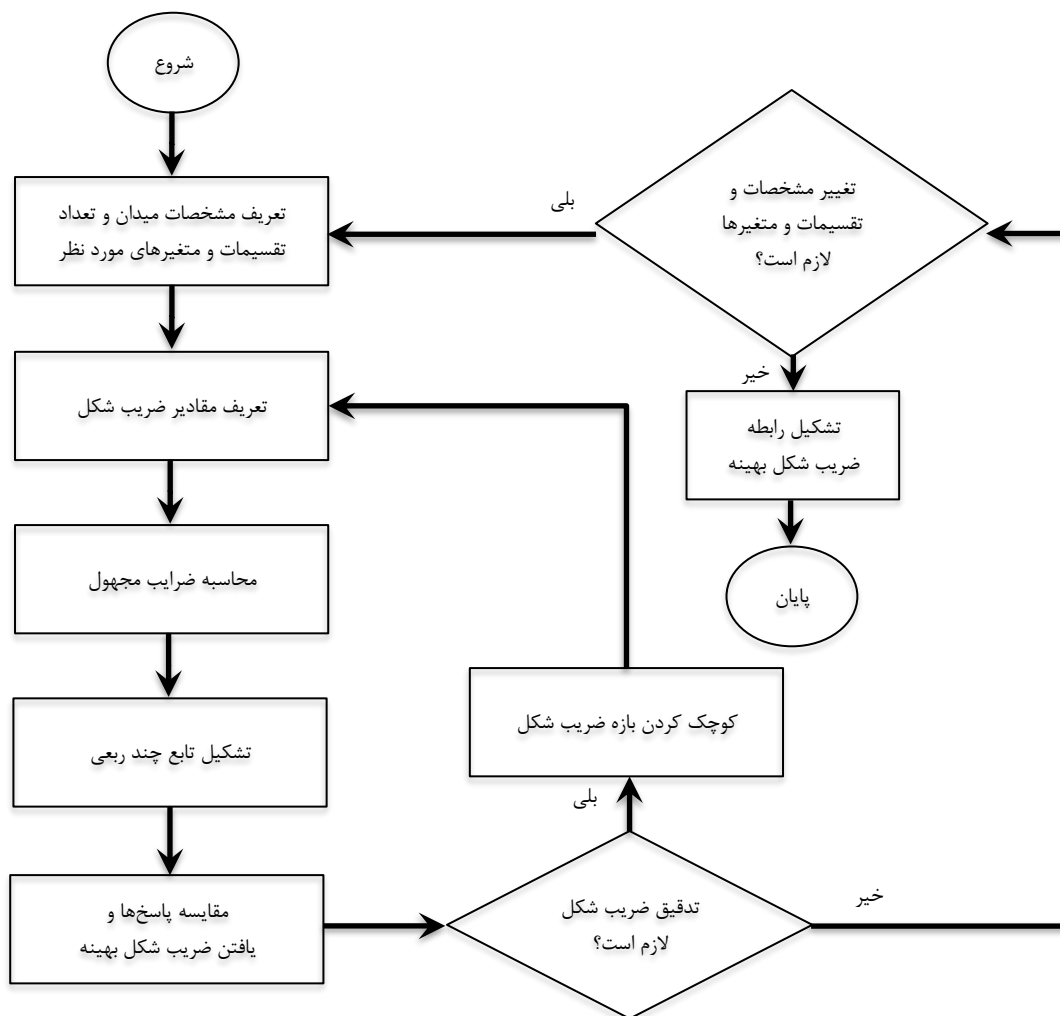
که در آن، u سرعت و R عدد رینولدز جریان می باشد. لازم به ذکر است که عدد رینولدز همواره مثبت است. همچنین شرایط مرزی و اولیه در میدان های یک بعدی برای

²¹ Burgers' equation

در این رابطه، $S(x_i)$ و $E(x_i)$ به ترتیب پاسخ روش چندربعی و روش دقیق در نقطه x_i و M تعداد نقاط مشاهداتی است. در ادامه به بررسی ضریب پخش و سرعت در معادلات پخش و پخش-انتقال پرداخته و نشان داده خواهد شد که، گام زمانی به این دو متغیر وابسته است. همچنین روندنمای (فلوچارت) انجام محاسبات برای هر مثال، در شکل ۲ نشان داده شده است.

پژوهش، پاسخهای روش چندربعی با پاسخهای دقیق مسائل مقایسه می‌شوند و معیار خطای آنها بر اساس رابطه ریشه میانگین مربعات خطا یا رابطه (۲۷) گزارش می‌گردد.

$$E_{rms} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^M [S(x_i) - E(x_i)]^2 \right) / M} \quad (27)$$



شکل ۲: روندنمای (فلوچارت) انجام محاسبات برای هر مثال

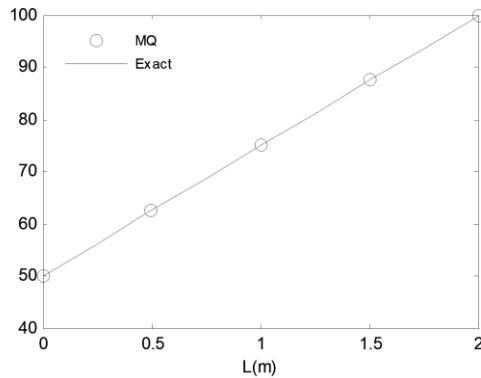
۵-۱- مثال شماره یک

در این مثال، حل معادله دیفرانسیل لاپلاس یا (۱۰) موردنظر است. ابعاد منتخب میدان و تعداد مراکز محاسباتی به ترتیب برابر $L = 2, 3, 4$ و $N = 10, 15, 20, 25, 30$ تعریف شده‌اند. حل دقیق معادله (۱۰) به همراه شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲) به صورت رابطه (۲۸) به دست می‌آید.

$$h(x, t) = \left(\frac{f_2 - f_1}{L} \right) x + f_1 \quad (28)$$

برای حل مسئله حاضر به روش چندربعی، رابطه (۲۹) برای تعیین متغیر شکل بهینه پیشنهاد می‌شود:

$$\ln(c) = a_1 + \frac{b_1}{N} + f_1 L + \frac{d_1}{L^{0.5}} \quad (29)$$



شکل ۳: پاسخ‌های روش دقیق و عددی در مثال شماره یک

$(L=2 \text{ و } N=5)$

خطاهای نتایج روش حاضر با استفاده از روابط متغیر

شکل موجود و رابطه (۲۹) برای حالت $L=3$ در جدول ۴

درج شده‌اند.

جدول ۴: E_{rms} در مثال شماره یک ($L=3$)

۲۰	۱۵	۱۰	۵	N رابطه
۳۹/۴	۱۰۷/۴۳	۰/۰۰۰۵	۰/۱۸	Eq.(۳)
۰/۰۰۰۳	۰/۰۵	۰/۰۶	۱/۰۱	Eq.(۴)
۰/۰۰۰۸	۰/۰۱	۰/۲۳	۰/۳۲	Eq.(۵)
۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۷	۰/۰۴	۰/۶۵	ESP
۰/۰۴	۰/۰۸	۰/۱۹	۰/۶۵	ILSP
۰/۰۲	۰/۰۴	۰/۱۱	۰/۵۲	DLSP
۰/۰۶	۰/۱	۰/۰۸	۰/۸۳	RSP
۰/۰۵	۰/۱	۰/۲۴	۰/۸۵	TSP
۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۲۴	۱/۱۵	HSP
۰/۰۲	۰/۱۵	۰/۶	۱۰/۶۹	BSP
۰/۰۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۰۱۶	۰/۰۰۰۰۱۴	Eq. (۲۹)

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودارهای پاسخ

دقیق و عددی در $N=20$ و $L=3$ با خطای 4×10^{-5}

به‌خوبی بر روی هم منطبق شده‌اند و نتیجه اینکه؛ رابطه

(۲۹) از دقت بالایی برخوردار است.

۵-۲- مثال شماره دو

در این مثال حل معادله پخش-انتقال (۱۶) مورد

توجه قرار گرفته است. ابعاد منتخب میدان و تعداد مراکز

محاسباتی به ترتیب برابر $L=2, 3, 4$ و

$N=45, 50, 80, 90$ تعریف شده‌اند. حل دقیق معادله (۱۶)

که مقادیر ثابت آن در جدول ۲ ارائه گردیده‌اند.

جدول ۲: مقادیر ثابت رابطه (۲۹).

d_1	f_1	b_1	a_1
۱/۹۴۸۱۹۰۹	۱/۱۵۳۰۸۷۸۷	۲/۵۹۹۹۱۸	۱/۰۱۹۷۹۱۴۰۸
-	.	۲	.

خطاهای نتایج روش چندربعی با استفاده از روابط

متغیر شکل بیان‌شده در بخش ۳ و رابطه پیشنهادی این

پژوهش برای حالت $L=2$ در جدول ۳ درج شده‌اند.

جدول ۳: E_{rms} در مثال شماره یک ($L=2$)

۲۰	۱۵	۱۰	۵	N رابطه
۱۷۲/۸۷	۵۸۲۴/۹	۰/۱	۰/۱	Eq.(۳)
۶۹۷	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۳	۰/۲۸	Eq.(۴)
۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۷	۰/۰۰۹	۲/۰۳	Eq.(۵)
۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۸	۰/۰۱	۰/۲	ESP
۰/۰۲	۰/۰۴	۰/۱	۰/۳۶	ILSP
۰/۰۰۸	۰/۰۱	۰/۰۳	۰/۲۲	DLSP
۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۴	۰/۰۱	۰/۱۹	RSP
۰/۰۳	۰/۰۵۹	۰/۱۵	۰/۶۳	TSP
۰/۰۰۰۳	۰/۰۱	۰/۰۱	۱/۵۳	HSP
۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۴	۰/۰۵	۳۵/۰۲	BSP
۰/۰۰۰۰۲۴	۰/۰۰۰۰۲۴	۰/۰۰۰۱۱	۰/۰۰۰۰۰۳	Eq.(۲۹)

نتایج نشان می‌دهد که خطاهای به‌دست‌آمده از

رابطه پیشنهادی این پژوهش برخلاف روابط پیشین بسیار

ناچیز بوده و نتایج آن در $L=2$ کاملاً قابل قبول است. در

ادامه نمودارهای پاسخ مربوط به حل عددی و دقیق در

$N=5$ ارائه گردیده است (شکل ۳).

همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، پاسخ‌های

روش عددی و دقیق در $N=5$ و $L=2$ با خطای 3×10^{-6}

بر روی هم منطبق شده‌اند. این امر نشان می‌دهد که رابطه

(۲۹) از دقت قابل قبولی برخوردار است. واضح است که؛

این رابطه حتی با تعداد مراکز محاسباتی کم، خطای

ناچیزی دارد و می‌تواند حجم محاسبات را قویاً کاهش

می‌دهد.

روش عددی و تحلیلی با خطای بسیار ناچیز بر روی هم منطبق هستند (شکل ۵).

جدول ۶: E_{rms} در مثال شماره دو ($D = 0.05$, $L = 2$) و $(V = 0.7)$.

رابطه	N	۴۵	۵۰	۸۰	۹۰
Eq.(۳)	۸۶۳۴	۷۳۵۴	۲۳۵۷	۳۸۳	
Eq.(۴)	۱۶۵	۵۵۴	۶۵۴	۵۳۴	
Eq.(۵)	۲۵	۱۲	۷	۱۱	
ESP	۴۵۲	۳۶۹	۳۴۸۵	۵۴۸۷	
ILSP	بی‌نهایت	بی‌نهایت	۵۲۴۵	۷۴۵	
DLSP	۵۱۸۲	۱۲۶۹	۱۲۲۵	۹۵۲	
RSP	۱۳,۲۹	۳,۸۱	۱۱۸۴	۱۰۷۳	
TSP	۰,۰۰۷	۰,۰۱	۴۵۷۵	۱۵۵۳	
HSP	۳۱۷	۴۰۷۴/۱	۳۱۴۹	۱۰۰۰۰	
BSP	۰,۱۵	۰,۱۱	۲۸,۹۵	۴۵,۵	
Eq. (۳۱)	۰,۰۰۱۴	۰,۰۰۰۳۴	۰,۰۰۰۰۲۳	۰,۰۰۰۰۲۲	

ملاحظه می‌شود که رابطه پیشنهادی به نتایج بسیار دقیق تری می‌انجامد.

جدول ۷: E_{rms} در مثال شماره دو ($D = 0.05$, $L = 3$) و $(V = 0.7)$.

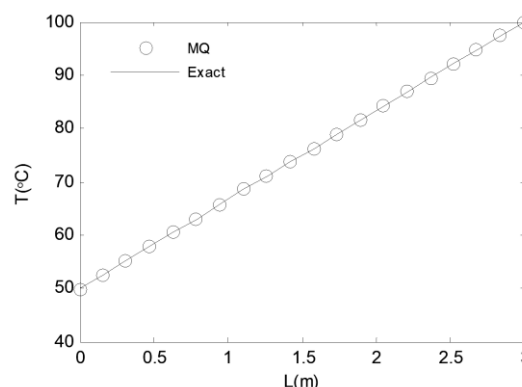
رابطه	N	۴۵	۵۰	۸۰	۹۰
Eq.(۳)	۷۵۲۲	۱۰۰۰۰	۳۷۹	۳۵۶۴	
Eq.(۴)	۳۶۷	۳۵۸	۶۳۵۴	۳۶۵	
Eq.(۵)	۶۲۳	۴۵۶	۳۷۵	۴۱۱	
ESP	۵۴۸۴	۵۶۸۷	۳۲۶۵	۱۹۷۸	
ILSP	۷۳۶۱	۳۲۷۴	۱۳۳۲	۳۲۳	
DLSP	۱۷۷۲	۵۴۱۰	۷۰۶۷	۹۹۰۱	
RSP	۰,۰۱	۰,۰۷	۰,۱۵	۰,۲۴	
TSP	۰,۰۰۰۹	۰,۰۰۰۸	۰,۰۰۹	۷۸۱۰	
HSP	۴,۲۶	۱,۹۸	۳۹۵۸	۱۲۳۲	
BSP	۰,۰۰۹	۰,۰۷	۹,۱۳	۱,۴۱	
Eq. (۳۱)	۰,۰۰۰۲۹	۰,۰۰۱۸	۰,۰۰۰۰۴۲	۰,۰۰۰۰۵	

۵-۳- مثال شماره سه

در این مثال معادله پخش (۲۱) مورد بررسی قرار می‌گیرد. حل دقیق این معادله به همراه شرایط مرزی و اولیه (۱۷) و (۱۹) به صورت رابطه (۳۲) به دست می‌آید. در این مثال، $D = 0.13$ و $dt = 0.5$ در نظر گرفته شده است. پاسخ دقیق معادله به شکل رابطه (۳۲) است [۲۹].

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \quad (32)$$

به همراه شرایط مرزی و اولیه (۱۷) و (۱۹) به صورت رابطه (۳۰) به دست می‌آید [۲۷].



شکل ۴: پاسخ‌های روش دقیق و عددی در مثال شماره یک ($N = 20$ و $L = 3$).

در این مثال، $V = 0.8$, $D = 0.05$, $t = 0.1$ و $dt = 0.001$ در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(x-1-Vt)^2}{D(4t+1)}\right] \quad (30)$$

روشن است که، شرایط مرزی و اولیه به ترتیب با قرار دادن $x=0, L$ و $t=0$ در رابطه (۳۰) قابل حصول هستند. برای حل مسئله حاضر به روش چندربعی، رابطه (۳۱) برای متغیر شکل بهینه پیشنهاد می‌شود:

$$\ln(c) = a_2 + b_2 \ln(N) + \frac{f_2}{L^{0.5}} \quad (31)$$

که مقادیر ثابت آن در جدول ۵: مقادیر ثابت رابطه ارائه گردیده‌اند.

جدول ۵: مقادیر ثابت رابطه (۳۱).

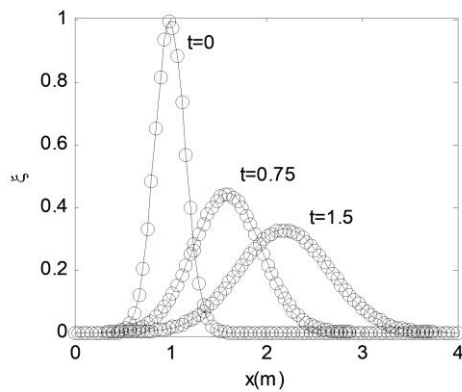
متغیر	a_2	b_2	f_2
مقدار	۶/۰۳۵۴۲۷۹	-۱/۱۵۹۴۴۲۵	-۳/۸۱۳۱۲۳۹

در حالت $L = 2, 3$ ، مقادیر خطای روابط متغیر شکل

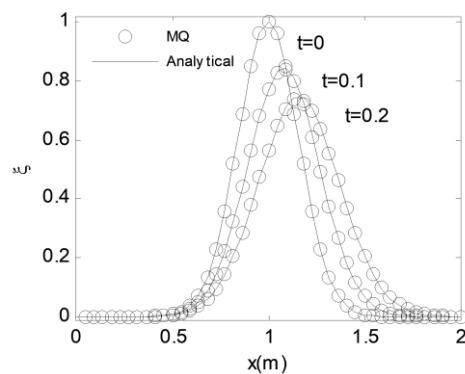
بهینه در جدول ۶ و جدول ۷ ارائه گردیده است.

نتایج نشان می‌دهد که هرچند روش TSP به ازای $L = 3$ از دقت خوبی برخوردار است ولی با تغییر متغیر L دچار خطای مشهودی می‌شود. لذا این رابطه به همراه سایر روابط پیشین برخلاف رابطه (۳۱) از دقت کافی برخوردار نیستند. در ادامه نشان داده شده است که، دو نمودار پاسخ

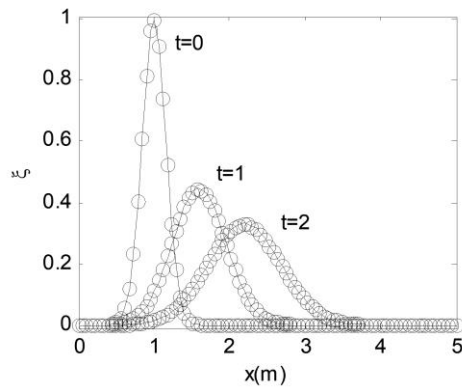
برای حل مسئله حاضر به روش چندربعی، رابطه (۳۳) برای تعیین متغیر شکل بهینه پیشنهاد می شود:



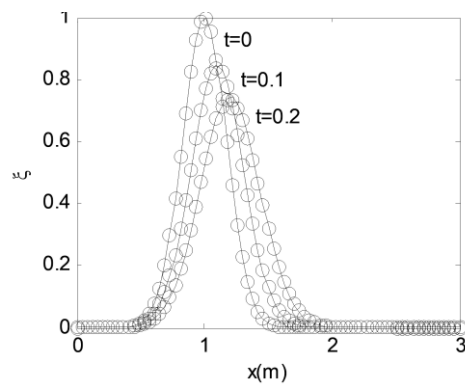
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۵: پاسخ های روش دقیق و عددی در مثال شماره دو (الف: $N = 45$, $L = 2$, $D = 0.05$ و $V = 0.8$; (ب: $N = 90$, $L = 4$; (ج: $N = 75$, $L = 3$, $D = 0.06$ و $V = 1$; (د: $N = 90$, $L = 5$, $D = 0.05$ و $V = 0.6$)

جدول ۹: E_{ms} در مثال شماره سه ($L = 2$).

رابطه	N	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۵
Eq.(۳)	۰.۱۹	۱.۳	۶۶۶.۹	۹۲۸.۲۹	۱۰۹۹.۱	
Eq.(۴)	۰.۷۷	۱۳۲.۰۴	۱۳۵.۵	۱۹۲۲.۷	۶۳۸.۶	
Eq.(۵)	۰.۷۶	۰.۶۵	۰.۶۳	۰.۷۷	۰.۸۶	
ESP	۰.۱۰۷	۰.۱۰۳	۰.۱۴	۴.۱	۶۷.۲	
ILSP	۰.۲	۰.۱۷	۰.۱۳	۰.۱۲	۰.۱	
DLSP	۰.۱۷	۰.۱۶	۰.۱۳	۰.۱۱	۰.۱	
RSP	۰.۱۰۷	۰.۱۰۹	۰.۱۱	۰.۱۱	۰.۰۶	
TSP	۰.۰۲	۰.۱	۰.۱۱	۰.۱۰۸	۰.۰۵	
HSP	۰.۱۱	۰.۳	۰.۲	۰.۲۱	۱.۰۷	
BSP	۰.۱۶	۰.۱	۰.۰۸	۰.۱۷	۰.۰۵	
Eq. (۳۳)	۰.۰۰۵۳	۰.۰۰۳۵	۰.۰۰۲۹	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۲۱	

ملاحظه می شود که رابطه پیشنهادی به نتایج بسیار دقیق تر از سایر روابط می انجامد.

چنانکه ملاحظه می شود، نمودارهای اعتبارسنجی دو روش چندربعی و دقیق در شکل ۶ به طور چشمگیری بر هم

که مقادیر ثابت آن در جدول ۸ ارائه گردیده اند.

جدول ۸: مقادیر ثابت رابطه (۳۳).

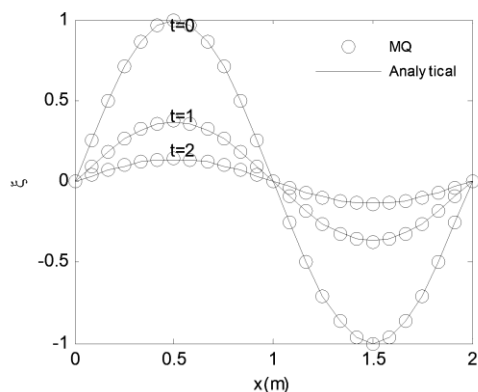
متغیر	مقدار	متغیر	مقدار
a_3	-۰/۹۹۰۵۴۲۳۷	g_3	۱۰۶۰/۰۰۵
b_3	۲۸/۹۱۴۵۱۸	h_3	۰/۰۰۱۵۴۵۹۵۹۶
k_3	۰/۳۳۴۴۱۵۸۹	i_3	۰/۱۸۰۶۹۴۲۱
d_3	-۳۰۱/۰۸۹۲۴	j_3	۲۶/۸۶۷۰۰۹
f_3	-۰/۰۳۵۶۸۴۲۸۷	e_3	-۰/۰۳۶۰۰۲۱

$$c(N, L) = a_3 + k_3 L + b_3 / N + d_3 / N^2 + e_3 L^2 + f_3 L / N + g_3 / N^3 + h_3 L^3 + i_3 L^2 / N + j_3 L / N^2 \quad (33)$$

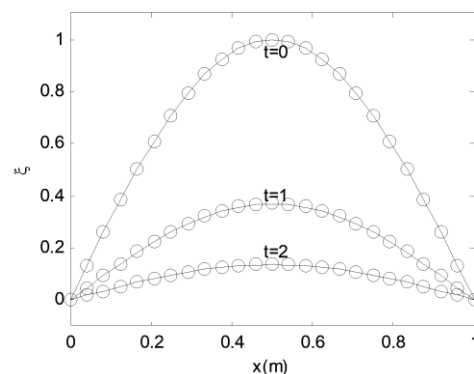
هنگامی که $L = 2, 3$ است، نتایج روابط تعیین متغیر شکل بهینه مطابق جدول ۹ و جدول ۱۰ به دست می آید.

منطبق شده‌اند و رابطه (۳۳) از دقت بسیار قابل قبولی برخوردار است. با توجه به خطای گزارش شده، ملاحظه

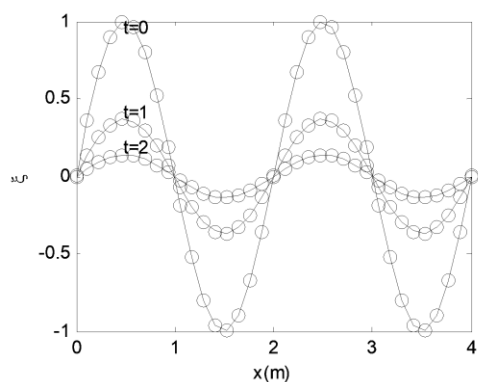
می‌گردد که با افزایش تعداد نقاط محاسباتی خطای رابطه پیشنهادی کاهش یافته است.



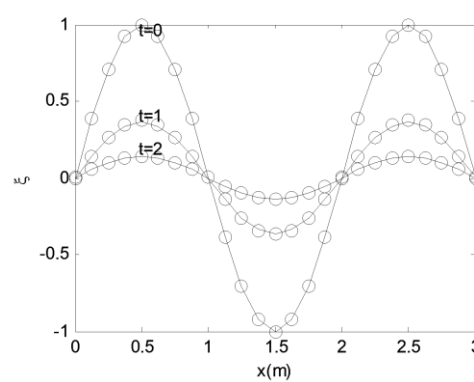
(ب)



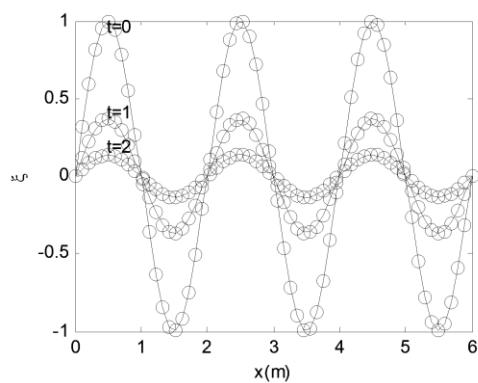
(الف)



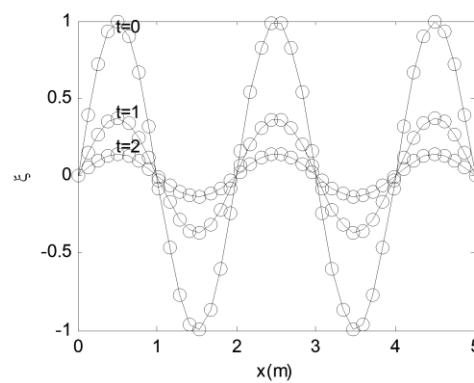
(د)



(ج)



(و)



(ه)

شکل ۶: پاسخ‌های روش‌های دقیق و عددی در مثال شماره سه (الف) $L=1$ و $N=20$ ، (ب) $L=2$ و $N=25$ ، (ج) $L=3$ و

$N=60$ و $L=6$ (و) $N=40$ و $L=5$ (ه) $N=35$ و $L=4$ (د) $N=25$

۴-۵- مثال شماره چهار

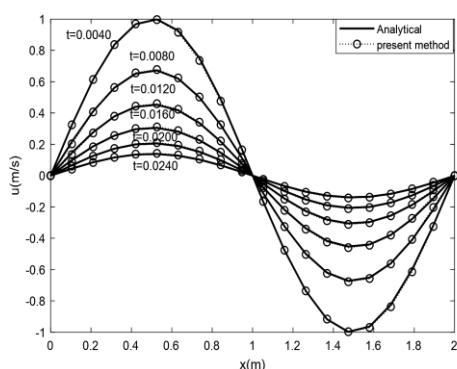
در این مثال، معادله برگرز (۲۴) مورد مطالعه قرار می‌گیرد. حل دقیق این معادله حاضر با فرض:

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \\ u(x,0)=\sin(\pi x) \end{cases} \quad (34)$$

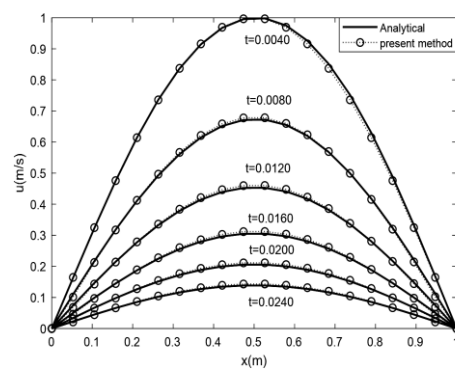
به صورت رابطه (۳۵) به دست آمده است [۲۸].

جدول ۱۰: E_{ms} در مثال شماره سه ($L=3$).

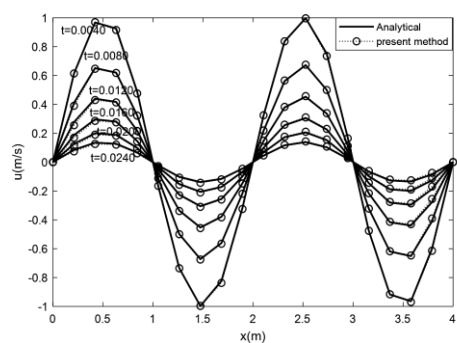
۳۵	۲۵	۲۰	۱۵	۱۰	N
۲۵۴۴	۴۰.۶	۴۲۳	۴۳.۵	۰.۰۰۰۳	Eq.(۳)
۹۰۰	۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۳	۰.۰۰۱	۶۵۶.۷	Eq.(۴)
۰.۹۳	۰.۸۶	۰.۹۸	۰.۸۷	۰.۹۵	Eq.(۵)
۱,۴	۰.۰۴	۰.۰۲	۰.۰۱	۰.۰۰۴	ESP
۰.۰۰۰۶	۰.۰۱	۰.۰۱	۰.۰۳	۰.۰۸	ILSP
۰.۰۰۰۵	۰.۰۱	۰.۰۱	۰.۰۲	۰.۰۵	DLSP
۰.۰۰۸	۰.۰۴	۰.۰۴	۰.۰۴	۰.۰۷	RSP
۰.۰۰۰۴	۰.۰۰۰۶	۰.۰۰۰۸	۰.۰۰۱	۰.۰۲	TSP
۰.۰۳	۰.۱	۰.۰۷	۰.۱	۰.۰۹	HSP
۰.۰۰۳	۰.۰۴	۰.۰۶	۰.۰۸	۰.۱۴	BSP
۰.۰۰۰۲۲	۰.۰۰۰۲۷	۰.۰۰۰۳۱	۰.۰۰۰۴۱	۰.۰۰۰۹۲	Eq. (۳۳)



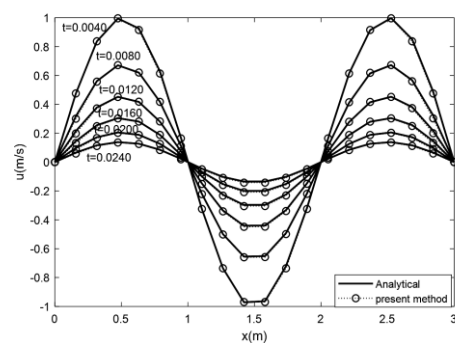
(ب)



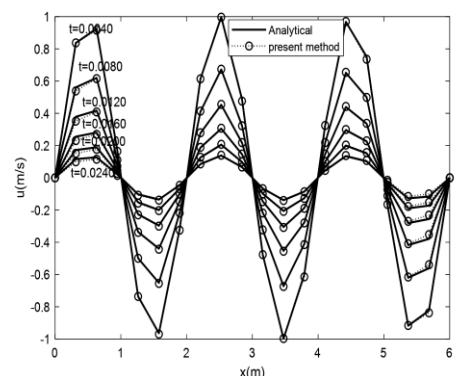
(الف)



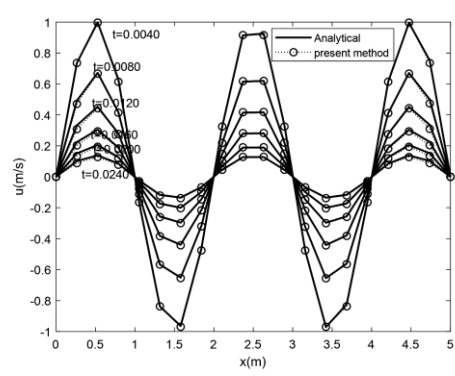
(د)



(ج)



(ه)



(و)

شکل ۷: پاسخ‌های روش دقیق و عددی در مثال شماره چهار به ازای L از ۱ تا ۶ به ترتیب در نمودارهای (الف) تا (ه).

گام زمانی (گام زمانی بیشینه) که به ازای آن ناپایداری در پاسخ‌ها مشاهده نشود، به‌صورت تجربی تعیین می‌گردد و تغییرات آن برحسب ضرایب ثابت معادلات حاضر (ضریب پخش، ضریب سرعت و عدد رینولدز) ترسیم می‌گردد.

جدول ۱۲: E_{rms} در مثال شماره چهار ($L=1$)

رابطه	N	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
Eq.(۳)	۸۳۰	۵۰۰	۱۰۰۰	۳۲۰۰	
Eq.(۴)	۱۲٫۹	۳۷۰	۹۸۰	۱۷۰۰	
Eq.(۵)	۱۱	۱۵	۱۶	۱۶	
ESP	۲۷٫۳	۲۷	۸۴	۷۸۰	
ILSP	۴۲۲	۲۵۰۰	۵۲۴٫۷	۱۸۹	
DLSP	۲۶۰	۷۷۹٫۸	۲۲۵٫۶	۱۱۷٫۷	
RSP	۱۲۰۰	۶۰۰۰	۵۰۰۰	۲۱۰۰۰	
TSP	۵۵۰	۸۳۰	۱۷۰۰	۳۳۰	
HSP	۱۶۰۰	۲۸۰۰	۶۰۰۰	۵۰۰۰	
BSP	۳۷۰۰	۱۱۰۰	۹۲۰۰	۱۷۰۰۰	
Eq.(۳۶)	۲٫۱۴	۱٫۷	۱٫۹	۲٫۶۳	

جدول ۱۳: E_{rms} در مثال شماره چهار ($L=2$)

رابطه	N	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
Eq.(۳)	۶۶۰	۹۳۰	۴۰۰	۱۳۰۰	
Eq.(۴)	۱۲٫۶	۱۴	۸٫۸	۹۷۰	
Eq.(۵)	۱۲۲	۱۳۹	۱۰۱۴۹	۱۵۴	
ESP	۲۲	۶۸۰	۲۵۰	۱۷۰	
ILSP	۸۲٫۶	۸۳	۸۷٫۱	۷۶٫۷	
DLSP	۹۰	۷۲٫۴	۷۳٫۳۹	۷۱٫۶	
RSP	۳۹۰	۴۳۰	۲۱۰	۷۵۰	
TSP	۷۹۰	۵۸۰	۳۸۰	۲۱۰	
HSP	۹۹۰	۱۵۰۰	۱۸۰۰	۷۵۰۰	
BSP	۹۷۰	۶۴۰	۱۶۰۰	۸۶۰	
Eq.(۳۶)	۲٫۲۷۳۸	۱٫۶۱۴۴	۱٫۹۱۲۷	۱٫۸۸۲۸	

با بررسی نمودارهای ارائه‌شده در شکل ۸ درمی‌یابیم که در معادله پخش، گام زمانی بیشینه با ضریب پخش رابطه مستقیم دارد. شکل ۹ نیز نشان می‌دهد که در معادله پخش-انتقال، گام زمانی بیشینه با ضریب پخش و سرعت به ترتیب رابطه مستقیم و معکوس دارد. همچنین در شکل ۱۰ دیده می‌شود که عدد رینولدز با گام زمانی بیشینه در حل عددی معادله برگز رابطه مستقیم دارد.

$$u(x,t) = \left[\frac{4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n I_n \left(\frac{1}{2\pi g} \right)}{\sin(n\pi x) \exp(-n^2 g \pi^2 t)} \right] / \left[I_0 \left(\frac{1}{2\pi g} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi g} \right) \right] \cos(n\pi x) \exp(-n^2 g \pi^2 t) \quad (35)$$

که در آن I_n ، $g = \frac{1}{R}$ ، تابع بسل اصلاح‌شده مرتبه n و $R = 0.1$ است.

در مثال شماره چهار، رابطه متغیر شکل با تعریف ابعاد منتخب میدان و تعداد مراکز محاسباتی به ترتیب با مشخصات $N = 10, 15, 20, 25$ و $L = 1, 2, \dots, 6$ به‌صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$c(N, L) = a_4 + \frac{b_4}{N} + k_4 L + \frac{d_4}{N^2} + e_4 L^2 + \frac{f_4 L}{N} + \frac{g_4}{N^3} + h_4 L^3 + \frac{i_4 L^2}{N} + \frac{j_4 L}{N^2} \quad (36)$$

که ضرایب ثابت این رابطه به شرح جدول ۱۱ هستند.

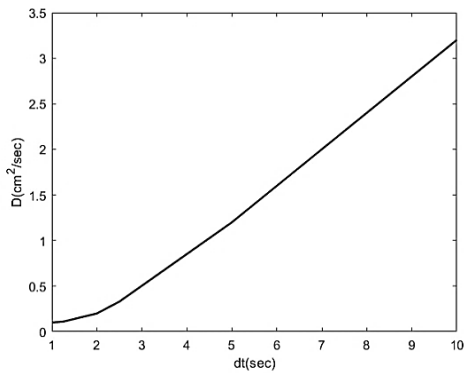
جدول ۱۱: مقادیر ثابت رابطه (۳۶).

ضریب	مقدار	ضریب	مقدار
a_4	-۰٫۰۷۵۶۶۹۶۹	f_4	-۰٫۱۸۴۱۲۰۰۲
b_4	۳٫۲۲۶۲۰۸	g_4	۲۰۴٫۴۶۹۰۳
k_4	۰٫۰۲۷۱۶۶۵۲۷	h_4	۰٫۰۰۰۲۵۴۲۰۴۵۳
d_4	-۴۵٫۶۴۴۰۴۶	i_4	۰٫۰۳۵۴۸۷۱۸
e_4	-۰٫۰۳۸۹۲۱۹۷۶	j_4	۶٫۲۱۷۷۷۹۷

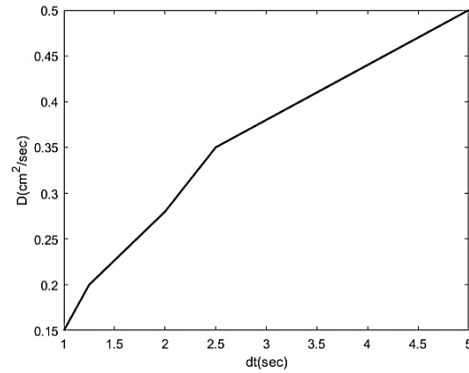
نتایج حل مسئله با استفاده از رابطه پیشنهادی در شکل ۷ آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود انطباق بسیار خوبی بین پاسخ‌های روش‌های عددی و دقیق وجود دارد. چنانکه در جدول ۱۲ و جدول ۱۳ مشاهده می‌شود، روابط پیشین تعیین متغیر شکل بهینه دقت لازم به ازای تعداد نقاط محاسباتی دلخواه را ندارند.

۶- بررسی وجود شرط پایداری

پرسش مهمی که عموماً در حل مسائل ناپایا مانند معادلات پخش، پخش-انتقال و برگز با هر روش عددی از جمله روش چندربعی مطرح می‌شود این است که آیا شرط پایداری برای این روند حل وجود دارد یا خیر؟ در این بخش به این موضوع خواهیم پرداخت. به این منظور بزرگترین

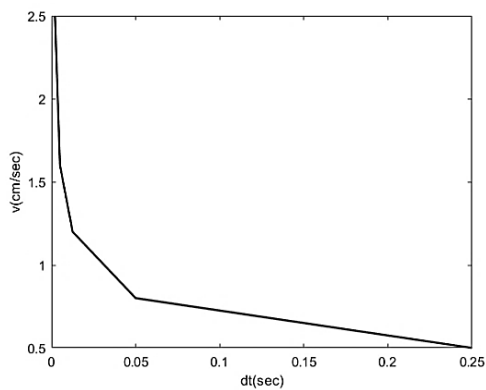


(ب)

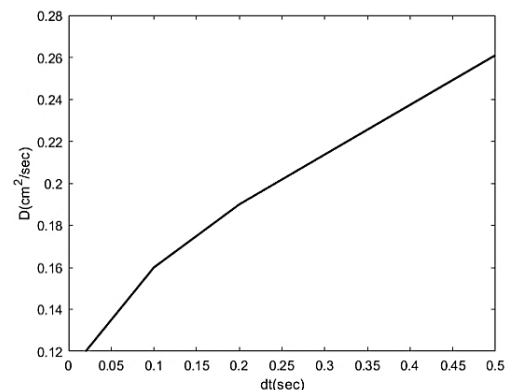


(الف)

شکل ۸: تغییرات ضریب پخش برحسب گام زمانی بیشینه در معادله پخش؛ الف: $L=1$ ، $N=12$ و $t=10$ و ب: $L=2$ ، $N=20$ و $t=20$.

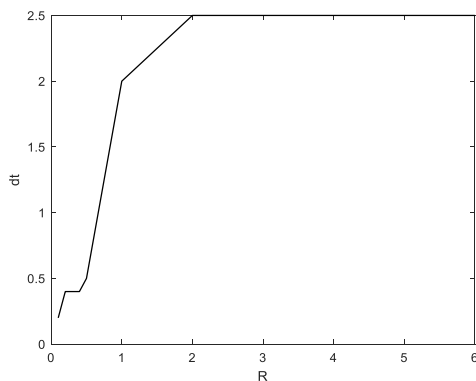


(ب)

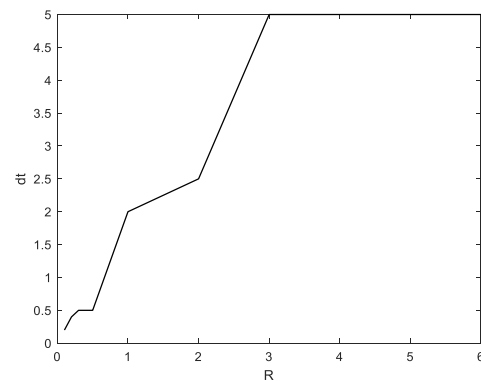


(الف)

شکل ۹: تغییرات الف) ضریب پخش ($t=2$ ، $V=2$ ، $N=30$ و $L=5$) و ب) ضریب انتقال ($t=0.5$ ، $D=0.1$ ، $N=50$ و $L=2$) برحسب گام زمانی بیشینه در معادله پخش-انتقال.



(ب)



(الف)

شکل ۱۰: تغییرات عدد رینولدز برحسب گام زمانی بیشینه در معادله برگرز الف: $t=10$ ، $N=10$ و $L=2$ ب: $t=10$ ، $N=10$ و $L=1$.

روش‌های مبتنی بر شبکه، مشهود است که برای تعیین آن نیاز به پژوهش‌های بیشتری وجود دارد.

۷- نتیجه‌گیری

نتایج این بخش نشان داد که مقداری از گام زمانی وجود دارد که به ازای مقادیر بزرگتر از آن، ناپایداری در پاسخ‌ها مشاهده می‌شود و وجود شرط پایداری، همانند

در این پژوهش نشان داده شد که روابط موجود برای تعیین متغیر شکل بهینه در روش بدون شبکه چندربعی برای حل معادلات لاپلاس، پخش-انتقال، پخش و برگرز از دقت لازم برخوردار نیستند. اگرچه در بعضی موارد دقت کافی مشاهده می‌شود ولی با تغییر متغیرهای مسئله مانند طول دامنه محاسباتی، کارایی نخواهند داشت. به همین منظور، در این پژوهش، روابط جدیدی برای محاسبه مقدار بهینه متغیر شکل برحسب طول دامنه و تعداد مراکز محاسباتی در معادلات مذکور ارائه شد. نتایج نشان داد که متغیر شکل‌های به‌دست‌آمده از این روابط در معادلات ناپایا برای همه گام‌های زمانی بهینه و از دقت بسیار خوبی برخوردار است. از مزایای روابط پیشنهادی نسبت به سایر روش‌های پیشین می‌توان به (۱) عدم وابستگی به یک حل ثانویه از مسئله، (۲) حل مسئله با یک سری از مراکز محاسباتی به جای دو سری از آن‌ها (۳) عدم نیاز به بهینه‌سازی متغیر شکل در هر گام زمانی (۴) هزینه کمتر محاسبات و (۵) کاربرد آسان اشاره کرد. برای حل مسائل، ابتدا معادلات حاکم با روش چندربعی بازتولید شد و نشان داده شد که روش تفاضلات محدود پیشرو برای گسسته سازی جملات زمانی و روش ضمنی شبه خطی و محض به ترتیب برای بیان جملات مکانی در معادلات برگرز و پخش-انتقال در کنار تابع چندربعی بهینه هستند، چراکه استفاده از روش‌های صریح محض در معادلات پخش-انتقال و روش ضمنی محض در معادله برگرز به ترتیب منجر به نیازمندی شدید به رعایت شرایط پایداری و دستگاه معادلات جبری غیرخطی می‌شوند. همچنین مشاهده شد که رابطه

ارائه‌شده برای متغیر شکل در معادله لاپلاس، در تعداد نقاط محاسباتی کم، دقت بالایی دارد و حجم محاسبات را کاهش می‌دهد. رابطه ارائه‌شده برای متغیر شکل در معادله پخش-انتقال و پخش، در تعداد نقاط محاسباتی کم، دقت قابل قبولی دارند ولی با افزایش تعداد نقاط محاسباتی، دقت جواب نیز افزایش می‌یابد. رابطه ارائه شده برای متغیر شکل در معادله برگرز نیز در دامنه‌ها با طول‌های مختلف و با تعداد مراکز محاسباتی دلخواه از دقت بالایی برخوردار است. لازم به تاکید است که این روش برای معادلات با ابعاد بالاتر یا با تعداد متغیرهای مستقل بیشتر، هم چنین برای شرایط مرزی متفاوت و یا ناهمگن نیز به همین ترتیب قابل پیاده‌سازی است ولی طبعاً روابط ریاضی به دست آمده برای ضرایب شکل، پیچیده‌تر خواهند بود. شایان ذکر است که روابط به دست آمده برای توزیع یکنواخت نقاط است و برای توزیع‌های نقاط متفاوت و در نتیجه تغییر فاصله بین نقاط، روابط متفاوتی برای متغیر شکل به دست خواهد آمد.

علاوه بر این در این پژوهش، همچنین نشان داده شد که انتخاب اندازه گام زمانی به عدد رینولدز، ضریب پخش و مقدار سرعت وابسته است به‌طوری‌که برای رسیدن به جواب با دقت لازم، با افزایش عدد رینولدز و ضریب پخش، گام زمانی نیز باید افزایش پیدا کند و با افزایش سرعت بایستی مقدار آن کاهش یابد. این نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم روش چندربعی برای حل معادلات خطی و غیرخطی در علوم مهندسی نیازمند تعیین یک شرط پایداری است که می‌تواند موضوع پژوهش‌های آینده باشد.

References

- [1] Kansa EJ. Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & mathematics with applications*. 1990;19(8-9):147-61. doi:10.1016/0898-1221(90)90271-K
- [2] Seydaoglu M. A meshless method for Burgers' equation using multiquadric radial basis functions with a Lie-group integrator. *Mathematics*. 2019;7(2):113. doi:10.3390/math7020113
- [3] Zheng K, Li C, Wang F, editors. Gaussian Radial Basis Function for Unsteady Groundwater Flow. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science; 2019: IOP Publishing. doi:10.1088/1755-1315/304/2/022052
- [4] Mirabi MH, Jabbari E, Rajaee T. Numerical Solution of Steady Incompressible Turbulent Navier-Stokes Equations using Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF) Method. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*. 2022;53(12):5325-56. doi:10.22060/ceej.2021.18788.6964 [In Persian]

- [5] Babae R, Jabbari E, Eskandari Ghadi M. Development of the Multiquadric mesh-less method for analyzing the dynamic interaction of dam-reservoir-foundation problems. *Sharif Journal of Civil Engineering*. 2022;38(3.1):65-76. doi:10.24200/J30.2022.60113.3085 [In Persian]
- [6] Babae R, Jabbari E, Eskandari-Ghadi M. Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*. 2019;52(12):3015-30. doi:10.22060/ceej.2019.16443.6230 [In Persian]
- [7] Chen C, Karageorghis A, Amuzu L. Kansa RBF collocation method with auxiliary boundary centres for high order BVPs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2021;398:113680. doi:10.1016/j.cam.2021.113680
- [8] Golbabai A, Mohebianfar E, Rabiei H. On the new variable shape parameter strategies for radial basis functions. *Computational and Applied Mathematics*. 2015;34(2):691-704. doi: 10.1007/s40314-014-0132-0
- [9] Zhang H, Guo C, Su X, Chen L. Shape parameter selection for multi-quadrics function method in solving electromagnetic boundary value problems. *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*. 2016;35(1):64-79. doi: 10.1108/COMPEL-12-2014-0350
- [10] Biazar J, Hosami M. Selection of an interval for variable shape parameter in approximation by radial basis functions. *Advances in numerical analysis*. 2016;2016(1):1397849. doi:10.1155/2016/1397849
- [11] Yaghouti M, Ramezannezhad Azarboni H. Determining optimal value of the shape parameter c in RBF for unequal distances topographical points by Cross-Validation algorithm. *Journal of Mathematical Modeling*. 2017;5(1):53-60. doi:10.22124/JMM.2017.2225
- [12] Chen W, Hong Y, Lin J. The sample solution approach for determination of the optimal shape parameter in the Multiquadric function of the Kansa method. *Computers & Mathematics with Applications*. 2018;75(8):2942-54. doi:10.1016/j.camwa.2018.01.023
- [13] Azarboni HR, Keyanpour M, Yaghouti M. Leave-Two-Out Cross Validation to optimal shape parameter in radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2019;100:204-10. doi:10.1016/j.enganabound.2018.06.011
- [14] Luh L-T. The choice of the shape parameter—A friendly approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2019;98:103-9. doi:10.1016/j.enganabound.2018.10.011
- [15] Koushki M, Babae R, Jabbari E. Application of MQ-RBF method for solving seepage problems with a new algorithm for optimization of the shape parameter. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*. 2020;52(4):1009-24. doi: 10.22060/CEEJ.2019.15155.5840 [In Persian]
- [16] Fallah A, Jabbari E, Babae R. Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization. *Computers & Mathematics with Applications*. 2019;77(3):815-29. doi:10.1016/j.camwa.2018.10.021
- [17] Kahid Basiri H, Babae R, Fallah A, Jabbari E. Development of multiquadric method for solving dam break problem. *Journal of Hydraulics*. 2020;14(4):83-98. doi:10.30482/JHYD.2020.105500 [In Persian]
- [18] Sun J, Wang L, Gong D. Model for Choosing the Shape Parameter in the Multiquadratic Radial Basis Function Interpolation of an Arbitrary Sine Wave and Its Application. *Mathematics*. 2023;11(8):1856. doi:10.3390/math11081856
- [19] Sun J, Wang L, Gong D. An adaptive selection method for shape parameters in mq-rbf interpolation for two-dimensional scattered data and its application to integral equation solving. *Fractal and Fractional*. 2023;7(6):448. doi:10.3390/fractalfract7060448
- [20] Pekmen B, Kayabasi M. Machine Learning Modeling for Shape Parameter c in MQ-RBF Applied to Burgers' Equations. doi:10.1007/978-3-031-70018-7_32
- [21] Pekmen Geridonmez B, Kayabasi M, editors. Machine Learning Modeling for Shape Parameter c in MQ-RBF Applied to Burgers' Equations. *International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems*; 2024: Springer. doi:10.1007/9
- [22] Sun J, Wang W. Adaptive selection of shape parameters for MQRBF in arbitrary scattered data: enhancing finite difference solutions for complex PDEs. *Computational and Applied Mathematics*. 2024;43(8):1-41. doi:10.1007/s40314-024-02970-6
- [23] Taleni-Kalan H. Investigation of optimal shape parameter determination in multiquadric method for solving linear equation in water engineering. MSc Thesis, Faculty of Engineering, University of Qom, 2020. [In Persian]
- [24] Mohsenzadeh Golafzani S. Investigation of Optimal Shape Parameter determination in Multiquadric Method for Solving nonlinear Equations in Water Engineering. MSc Thesis, Faculty of Engineering, University of Qom, 2020. [In Persian]
- [25] Pourlak M, Jabbari E, Akbari H. The Effect of Initial Particles Distribution by in Smoothed Particle Hydrodynamic Method in Wave Generation Modeling Based on Laboratory Model. *Civil Infrastructure Researches*. 2023;9(2):35-50. doi:10.22091/CER.2023.9003.1451 [In Persian]

- [26] MohammadAlian S, Babaee R, Jabbari E. A New Adaptive Algorithm for the Optimal Distribution of Computational Centers in the Meshless Multiquadric Method. *Civil Infrastructure Researches*. 2023;9(1):161-73. **doi:10.22091/CER.2023.8470.1419** [In Persian]
- [27] Gurarslan G, Karahan H, Alkaya D, Sari M, Yasar M. Numerical Solution of Advection-Diffusion Equation Using a Sixth-Order Compact Finite Difference Method. *Mathematical Problems in Engineering*. 2013;2013(1):672936. **doi:10.1155/2013/672936**
- [28] Hon Y-C, Mao X. An efficient numerical scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*. 1998;95(1):37-50. **doi:10.1016/S0096-3003(97)10060-1**
- [29] Khaksarfard M, Ordokhani Y, Hashemi MS, Karimi K. Space-time radial basis function collocation method for one-dimensional advection-diffusion problem. *Computational Methods for Differential Equations*. 2018;6(4):426-37. **doi:20.1001.1.23453982.2018.6.4.3.4**