

## **A New Adaptive Algorithm for the Optimal Distribution of Computational Centers in the Meshless Multiquadric Method**

The computational centers in the multiquadric radial basis functions meshless method have high adaptability considering the lack of geometric and physical connection between the centers. In this research, a new adaptive algorithm is proposed based on the gradients of the physical variables of the problem with the aim of creating an optimal distribution. The resulted adaptive distribution generated by this algorithm improves significantly the accuracy and speed of the multiquadric method compared to the uniform distribution in steady and unsteady problems. In this approach, firstly, the domains with low and high physical variations are identified in a known time step, then the number of computational centers decreases and increases in these areas, respectively. Thus, the centers will be distributed more compact where needed and will be eliminated where not. Facing another important challenge of the multiquadric method, i.e. determining the optimal shape parameter, a simple and efficient method is introduced in such a way that there is no need to optimize the shape parameter at each time step and the computational costs are controlled. Finally, the effectiveness of the proposed method is shown by solving examples of diffusion, convection and convection-diffusion equations. The results are compared to their uniform distributions by measuring their efficiency and to the exact solution by evaluating the accuracy.

**Keywords:** Meshless Method, Radial Basis Functions, Multiquadric -Method, Adaptive Algorithm.

## یک الگوریتم انطباقی جدید برای توزیع بهینه مراکز محاسباتی در روش بدون شبکه چندربعی

مراکز محاسباتی در روش توابع پایه شعاعی بدون شبکه چندربعی به علت عدم ارتباط هندسی و فیزیکی با یکدیگر دارای قابلیت انطباق‌پذیری بالا و لذا مناسب برای اعمال توزیع‌های انطباقی هستند. در این پژوهش، برای اولین بار یک الگوریتم انطباقی جدید بر مبنای تغییرات (گرادیان) متغیرهای فیزیکی مسئله با هدف ایجاد یک توزیع بهینه پیشنهاد شده است. توزیع انطباقی این الگوریتم، دقت و سرعت روش چندربعی را نسبت به توزیع یکنواخت در مسائل ناپایا به میزان قابل توجهی بهبود می‌بخشد. در این رویکرد نواحی با تغییرات فیزیکی کم و زیاد در گام زمانی معلوم شناسایی می‌شوند و تعداد مراکز محاسباتی به ترتیب در آن‌ها کاهش و افزایش می‌یابد. بنابراین نیاز به یک توزیع فشرده یکنواخت در سراسر میدان به منظور کاهش خطا در نواحی با تغییرات فیزیکی زیاد از بین می‌رود. در مواجهه با دیگر چالش مهم روش چندربعی یعنی تعیین متغیر شکل بهینه نیز یک روش ساده و کارآمد به گونه‌ای معرفی می‌شود که به بهینه‌سازی متغیر شکل در هر گام زمانی نیاز نباشد و هزینه‌های محاسباتی کنترل گردد. در پایان، کارایی روش پیشنهادی با ارائه مثال‌هایی از معادلات پخش، جابجایی و پخش-جابجایی برای مقایسه با توزیع‌های یکنواخت و سنجش میزان سرعت و دقت آن‌ها با حل دقیق نشان داده می‌شود.

**واژگان کلیدی:** روش بدون شبکه، توابع پایه شعاعی، روش چندربعی، الگوریتم انطباقی، گرادیان

### ۱- مقدمه

سه‌بعدی نیاز ندارند. یکی از روش‌های بدون شبکه مشهور، روش چندربعی<sup>۲</sup> (MQ) است که عضو اصلی خانواده توابع پایه شعاعی<sup>۳</sup> (RBF) به شمار می‌رود. کانزا<sup>۴</sup> در سال ۱۹۹۰ این روش را برای اولین بار جهت حل معادلات مشتق جزئی از جمله بیضوی، سهموی و هذلولوی به کار گرفت که به نام روش کانزا نیز شهرت یافت [۱]. این روش دقت قابل قبول و انعطاف‌پذیری بالایی برای حل انواع مسائل در مهندسی آب نیز داشته است. کیندلان<sup>۵</sup> و

روش‌های بدون شبکه<sup>۱</sup> در دهه‌های اخیر در زمینه‌های ریاضیات کاربردی و علوم مهندسی مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته‌اند. یکی از مزایای اصلی روش‌های بدون شبکه این است که به هزینه‌های محاسباتی پیش‌پردازش شبکه به‌خصوص در مسائل

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۰۰/۰۰/۰۰، بازنگری: ۰۰/۰۰/۰۰، پذیرش: ۰۰/۰۰/۰۰.

شناسه دیجیتال (DOI): 10.22091/cer.0000.0000.0000

<sup>۱</sup>- Meshless methods

<sup>۲</sup>- Multiquadric

<sup>۳</sup>- Radial Basis Function (RBF)

<sup>۴</sup>- Kansa

<sup>۵</sup>- Kindelan

استفاده از یک الگوریتم کارا برای پیدا کردن متغیر شکل بهینه مربوط می‌شود [۵]. کوشکی و همکاران در سال ۲۰۲۰، برای اولین بار از توزیع نقاط پادوا<sup>۱۰</sup> در فضای دوبعدی مربعی شکل برای حل معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی با استفاده از روش‌های توابع پایه شعاعی (چندربعی، چندربعی معکوس<sup>۱۱</sup> و ...) استفاده نمودند. نتایج ایشان نشان می‌دهد که توزیع پادوا در اکثر موارد با کم‌ترین تعداد نقاط محاسباتی بالاترین دقت را دارد. همچنین توزیع نقاط پادوا در ترکیب با سایر توزیع‌ها دقت پاسخ‌ها را افزایش می‌دهد [۶]. میرابی و همکاران اقدام به حل معادلات تراکم‌ناپذیر جریان پایا شامل معادلات پیوستگی، ناویراستوکس و مدل آشفتگی  $k - \epsilon$  استاندارد برای یک میدان حفره با درپوش متحرک مربعی نمودند [۷]. آنها با ارزیابی سرعت در هر دو جهت، فشار استاتیکی، انرژی جنبشی آشفته و استهلاک انرژی آشفته نتیجه گرفتند که با اتخاذ فرض استقلال مقادیر متغیر شکل بهینه برای هر میدان جریان در اعداد رینولدز مختلف مورد مطالعه، می‌توان به یک الگوی قابل پیش‌بینی برای مجموعه ضرائب مجهول  $\lambda$  در سایر اعداد رینولدز داخل بازه مورد نظر، دست‌یافت.

نکته مهم دیگر در روش چندربعی آن است که دقت این روش تا حد زیادی به متغیر شکل<sup>۱۲</sup> آن وابسته است. فرنبرگ<sup>۱۳</sup> و همکاران در سال ۲۰۰۴، با استفاده از یک الگوریتم جدید، مشکل روش چندربعی را هنگامی که متغیر شکل به مقادیر عددی بزرگ میل پیدا می‌کند، حل نمودند. [۸]. ژیانگ<sup>۱۴</sup> و همکاران در سال ۲۰۱۲ با ارائه یک رابطه مثلثاتی برای متغیر شکل و نمایی کردن تابع

همکاران (۲۰۱۰) جهت حل معادلات جابجایی ناپایا از روش چندربعی استفاده نمودند. ایشان همچنین، مزایای این روش از جمله کاربرد آسان، دقت بالا، انعطاف‌پذیری در دامنه‌های نامنظم و بسط آسان به ابعاد بالا (سه‌بعدی) را نیز نشان دادند که در مقابل، معایبی مانند ایجاد ماتریس‌های پر نیز وجود دارد [۲]. کانزا و همکاران در سال ۲۰۱۳، معادله برگرز<sup>۶</sup> غیرلزج سه‌بعدی را با روش چندربعی حل نمودند. در این پژوهش از روش تجزیه دامنه<sup>۷</sup> استفاده شد. با به‌کارگیری این روش، پیچیدگی هندسی دامنه‌های بزرگ کاهش پیدا کرده و به ساختارهای ساده‌تر تبدیل می‌شود. همچنین با این فن تعداد قابل توجهی درایه صفر در ماتریس ضرایب ایجاد خواهد شد [۳]. پاتل<sup>۸</sup> و همکاران در سال ۲۰۱۷ از روش چندربعی برای شبیه‌سازی آبخوان‌های نامنظم زیرزمینی استفاده کردند. ایشان متغیرهایی مانند ناهمگنی و شرایط مرزی با هد متغیر را در نظر گرفتند و مسئله تحلیل حساسیت را بر روی متغیرهایی مانند اندازه گام زمانی، تراکم مراکز محاسباتی و اندازه میدان بررسی نمودند. در نهایت با توجه به نتایج عددی به‌دست‌آمده مشخص شد که روش چندربعی می‌تواند به‌عنوان یک شبیه‌ساز بهینه در شبیه‌سازی آب‌های زیرزمینی به‌کاربرده شود [۴]. بابایی و همکاران روش چندربعی را برای حل معادله هلمهولتز<sup>۹</sup> به‌منظور آنالیز امواج لرزه‌ای در مخازن سدهای صلب به‌کاربردند. در این پژوهش دقت بالای روش حاضر طی دو مثال مختلف به ترتیب با و بدون در نظر گرفتن اثر جذب رسوبات کف مخزن در مقایسه با حل‌های دقیق نشان داده شد. دقت بالای این رویکرد به دلایلی همچون ایجاد یک تابع تخمین پیوسته در کل دامنه مسئله و

<sup>10</sup>- Padua points distribution

<sup>11</sup>- Inverse multiquadric

<sup>12</sup>- Shape parameter

<sup>13</sup>- Fornberg

<sup>14</sup>- Xiang

<sup>6</sup>- Burgers' equation

<sup>7</sup>- Domain decomposition

<sup>8</sup>- Patel

<sup>9</sup>- Helmholtz

رویکرد برای مسائل ناپایا مناسب نیست، چراکه حجم محاسبات برای تعیین مقدار بهینه متغیر شکل در گام‌های زمانی بالا می‌رود [۱۴].

موضوع مهم دیگر در روش چندربعی، توزیع مراکز محاسباتی آن است و اگر این توزیع به‌طور بهینه انجام گیرد، به سرعت و دقت حل مسئله می‌افزاید. به این منظور، الگوریتم‌های انطباقی<sup>۱۷</sup> (تطبیقی، وفقی یا سازگار) مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته‌اند. از آنجاییکه تعداد المانها یا تعداد نقاط در مسائل واقعی و به ویژه سه بعدی بسیار زیاد است و به دلیل تاثیر توان دوم آن بر حجم و زمان محاسبات، یک چالش مهم تلقی می‌شود، لذا هر روش و به کارگیری هر مفهومی که به کاهش تعداد این المانها یا نقاط مورد نیاز بیانجامد از اهمیت فراوانی برخوردار است. روش‌های تطبیقی ابتدا در روش‌های باشبکه توسعه یافتند، سپس با مورد توجه قرار گرفتن و توسعه یافتن روش‌های بدون شبکه، به علت پیاده‌سازی آسان و کاهش حجم محاسبات، در این روش‌ها نیز بکار گرفته شدند. اما تاکنون مطالعات معدودی برای معرفی و بکارگیری الگوریتم‌های انطباقی در روش‌های بدون شبکه انجام شده است. به ویژه در روش چندربعی این مطالعات بسیار محدود است. علاوه بر این استفاده از مفهوم گرادیان در تعریف توزیع انطباقی به شیوه‌ای که در این مقاله ارائه خواهد شد، برای اولین بار صورت می‌گیرد. در سال ۱۹۸۵ برگر<sup>۱۸</sup> و همکاران، یک روش اصلاح شبکه انطباقی برای حل معادلات دو بعدی اویلر<sup>۱۹</sup> ارائه نمودند. این روش ساده برای کشف نواحی با خطای بالا ارائه شده و با کوچک کردن اندازه شبکه در آن نواحی هزینه محاسبات را کاهش می‌دهد. البته شبکه‌های استفاده شده مستطیل شکل هستند و برای میدان‌هایی با هندسه پیچیده

چندربعی در حل مسائل مقدار مرزی یک بعدی و دوبعدی بیضوی توانستند دقت آن را بهبود بخشند [۹]. اسماعیل بیگی و همکاران در سال ۲۰۱۴ از الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی متغیر شکل روش چندربعی استفاده کردند. ایشان با حل معادلات دیفرانسیل معمولی نتیجه گرفتند که متغیر شکل به دست آمده در مقایسه با دیگر روابط متغیر شکل متغیر، نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد [۱۰]. بی‌آزار و همکاران در سال ۲۰۱۶ با استفاده از الگوریتم جدیدی ضرایب ثابت روابط تجربی متغیر شکل متغیر را تعیین کردند. نتایج ایشان نشان داد که ضرایب به دست آمده دقت روش چندربعی را افزایش می‌دهند اما به دلیل استفاده از سعی و خطا به هزینه محاسباتی بالایی نیازمند است [۱۱]. آذربنی و همکاران در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم با دقت بالا برای تعیین متغیر شکل بهینه ارائه دادند. در این روش، مسئله با تعداد  $N-2$  و  $N$  نقطه محاسباتی به ازای متغیر شکل‌های مختلف حل می‌شود و آن متغیری که کمترین اختلاف بین دو جواب را ارائه دهد، متغیر شکل بهینه است [۱۲]. فلاح و همکاران (۲۰۱۹) از یک الگوریتم جدید برای پیدا کردن متغیر شکل بهینه در حل مسائل تراوش<sup>۱۵</sup> با استفاده از روش چندربعی ارائه دادند. در این الگوریتم، از روش نصف کردن بازه متغیر شکل برای افزایش سرعت همگرایی استفاده شده و حدودی برای کران بالا و پایین بازه متغیر شکل پیشنهاد شده است. در این رویکرد، متغیر شکل بهینه مقداری است که تغییرات پاسخ مسئله نسبت به تغییرات آن کمینه باشد [۱۳]. کوشکی و همکاران در سال ۲۰۱۹ با استفاده از الگوریتم ژنتیک، روند دستیابی به متغیر شکل بهینه را برای حل معادله لاپلاس<sup>۱۶</sup> در مسئله تراوش ارائه کردند. در این رویکرد مقدار متغیر شکل بهینه مستقل از تعداد نقاط محاسباتی است. این

17- Adaptive algorithm

18- Berger

19- Euler

15- Seepage

16- Laplace

الگوریتم انطباقی دومرحله‌ای جدید را نیز برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از روش توابع پایه شعاعی پیشنهاد کردند. در این روش، در مرحله اول از یک شاخص خطا استفاده می‌شود تا مشخص گردد که کدام نواحی باید با افزایش مراکز محاسباتی تصحیح شوند. در مرحله دوم از یک طرح نمونه‌برداری باقی‌مانده انطباقی<sup>۲۶</sup> نیز جهت اصلاح بیشتر برخی از قسمت‌های دامنه استفاده شده است. به‌طور کلی ترکیب این دو مرحله منجر به بهبود دقت بیشتر روش در مقایسه با کاربرد هریک به تنهایی شده است. البته این کاربرد ترکیبی موجب افزایش زمان محاسباتی نیز می‌شود [۲۱]. کلب و اسفاکیاناکیس روشی را برای ریزکردن شبکه‌ها ارائه کردند که برای میدان‌های یک، دو و سه بعدی کاربرد دارد. آنها این تکنیک را برای شبیه‌سازی رشد سلولهای سرطانی به کار بردند [۲۲]. کاورتو و همکاران تکنیک‌های مرتبه سه را برای محاسبه انتگرالها در محاسبات مربوط به توابع پایه شعاعی مورد استفاده قرار دادند [۲۳]. آنها روش اعتبارسنجی حذفی متقاطع را برای بهینه‌سازی متغیر شکل به کار گرفتند. چنگ و همکاران با استفاده از چنین شبکه‌هایی و مفاهیم توابع پایه شعاعی، حرکت گروهی ماهی‌ها را شبیه‌سازی کردند [۲۴]. همچنین لوبر و همکاران با استفاده از یک شبکه انطباقی احجام محدود جدید، تقریب‌های مراتب بالاتر پاسخ یک دستگاه معادلات بقاء هذلولوی چندبعدی را ارائه نمودند [۲۵]. این روش شامل هم محدودیت‌های روش حجم محدود و روندهای ریزکردن شبکه و نیز مزیت معیارهای تعیین مرتبه بهینه چندبعدی است.

همان‌طور که ملاحظه شد، الگوریتم‌های انطباقی

طی سال‌های اخیر به‌منظور شبیه‌سازی میدان و مرزها در روشهای عددی موردتوجه پژوهشگران قرار داشته‌اند تا

کاربردی ندارند [۱۵]. سارا<sup>۲۰</sup> در سال ۲۰۰۵ با استفاده از روش‌های بدون شبکه توابع پایه شعاعی یک الگوریتم انطباقی برای توزیع مراکز محاسباتی معرفی نمود. ایشان مثال‌های عددی از معادله زمانی برگرز و معادله جابجایی یک‌بعدی با تغییرات سریع ارائه داد و نتیجه گرفت که با الگوریتم انطباقی مراکز کمتری نسبت به توزیع یکنواخت نقاط موردنیاز است [۱۶]. لیبر<sup>۲۱</sup> و همکاران در سال ۲۰۰۹، با بررسی سرعت همگرایی در روش چنددرجی، ثابت نمودند که اگر از نقاط انطباقی در حل مسئله استفاده گردد، دقت بیشتری نسبت به توزیع غیرانطباقی توأم با کاهش تعداد نقاط حاصل می‌شود [۱۷]. بی‌آزار و همکاران، یک روش انطباقی با عنوان "توزیع برابر" برای انتخاب مجموعه‌ای از نقاط معرفی کردند. بر اساس این روش، در مجموعه نقاط دامنه، نسبت بزرگترین فاصله به کوچکترین فاصله باید از مقدار معینی کوچک‌تر باشد. ایشان نشان دادند که با چنین توزیع انطباقی، یک حل تقریبی دقیق‌تر حاصل می‌شود [۱۸]. در سال ۲۰۱۹ چواتانگ<sup>۲۲</sup> و همکاران یک الگوریتم خودکار انطباقی توزیع نقاط را برای استفاده در روش چنددرجی بکار گرفتند. الگوریتم پیشنهادی آن‌ها گره‌هایی به مناطق با خطاهای بیشتر اضافه می‌کند و در نواحی با خطاهای کمتر، تعداد گره‌ها را کم می‌نماید. این الگوریتم نتایج خوبی را از نظر دقت نتایج و عدد شرط ماتریس به دست داده است [۱۹]. کاورتو و روسی<sup>۲۳</sup> در سال ۲۰۲۰ یک طرح انطباقی را جهت حل مسائل مقدار مرزی بیضوی، معادلات پواسون<sup>۲۴</sup> و هلمهولتز<sup>۲۵</sup> در دامنه‌های نامنظم یا  $L$  شکل برای توابع پایه شعاعی ارائه نمودند [۲۰]. ایشان همچنین یک

20- Sarra

21- Libre

22- Chuathong

23- Cavoretto & Rossi

24- Poisson equation

25- Helmholtz equation

26- Adaptive residual subsampling

## ۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

معادله پخش-جابجایی<sup>۲۷</sup> جزء معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی<sup>۲۸</sup> از نوع سهموی<sup>۲۹</sup> است. این معادله در بسیاری از پدیده‌های مهندسی مانند دینامیک سیالات محاسباتی<sup>۳۰</sup>، هیدرودینامیک، امواج شوک، انتقال حرارت و غیره کاربرد دارد و فرم کلی آن در حالت یک‌بعدی به صورت زیر است:

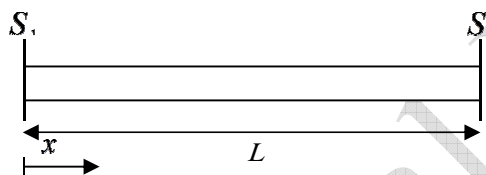
$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

که در آن  $x$ ،  $t$  و  $u$  به ترتیب زمان، فاصله از مبدأ مختصات و میزان غلظت آلاینده هستند. همچنین داریم:

$$0 \leq x \leq L \quad (2)$$

$$0 \leq t \leq T$$

که در آن  $L$  و  $T$  طول دامنه محاسباتی و زمان کل محاسبات نامیده می‌شوند.



شکل ۱- نمایش حالت کلی میدان یک‌بعدی در حل مسائل.

ضرایب ثابت مثبت  $V$  و  $D$  نیز به ترتیب بیانگر سرعت جابجایی و ضریب پخش آلاینده هستند. اگر متغیرهای  $V$  و  $D$ ، به طور مجزا برابر صفر در نظر گرفته شوند، رابطه (۱)، به ترتیب به معادله پخش<sup>۳۱</sup> و معادله جابجایی<sup>۳۲</sup> تبدیل می‌شود. در دامنه محاسباتی یک‌بعدی نشان داده شده در شکل ۱،  $S_1$  و  $S_2$  بیانگر شرایط مرزی

بتوانند مسائل را با دقت و زمان بهینه‌تری حل نمایند. در این راستا، کارهای چندانی در روش‌های توابع پایه شعاعی به‌ویژه روش چندربعی انجام نشده و همچنان امکان یافتن الگوریتم‌های بهینه به‌خصوص در مسائل وابسته به زمان وجود دارد. در این راستا، در پژوهش حاضر، یک الگوریتم انطباقی جدید برای روش چندربعی پیشنهاد شده است. این الگوریتم بر مبنای تغییرات یا گرادیان پاسخ‌ها تدوین شده است. در این رویکرد، مناطق مختلف دامنه با گرادیان زیاد و کم شناسایی شده و به ترتیب مراکز محاسباتی بیشتر و کمتری به آن‌ها اختصاص داده می‌شود. بدین ترتیب توزیع بهینه‌ای از مراکز محاسباتی ایجاد می‌شود و امکان حل مسائل با هزینه محاسباتی کمتر توأم با حفظ یا افزایش دقت نسبت به توزیع‌های یکنواخت به وجود می‌آید. از آنجایی که مراکز محاسباتی در روش بدون شبکه چندربعی مانند سایر توابع پایه شعاعی نیاز به پیوستگی یا ارتباطی خاص با یکدیگر ندارند، می‌توان به راحتی تعداد آن‌ها را در نواحی با گرادیان‌های مختلف تغییر داد و به یک توزیع بهینه دست یافت. در این مطالعه، به منظور بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی، حل معادلات ناپایای پخش، جابجایی و پخش-جابجایی مدنظر قرار گرفته‌اند. پس از حل این مسائل با توزیع مراکز محاسباتی یکنواخت و انطباقی، هزینه محاسبات آن‌ها مقایسه می‌شود. همچنین دقت پاسخ‌های هر مسئله با حل تحلیلی مختص به آن ارزیابی می‌گردد. لازم به ذکر است که برای انتخاب متغیر شکل بهینه نیز یک روش ساده و کارآمد معرفی می‌شود تا هزینه محاسباتی اضافی در حل مسائل به‌ویژه در بهینه کردن آن در هر گام زمانی ایجاد نگردد.

27- Convection-Diffusion equation

28- Partial Differential Equation (PDE)

29- Parabolic

30- Computational Fluid Dynamics (CFD)

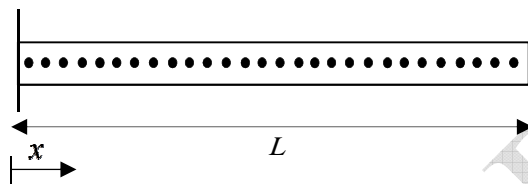
31- Diffusion equation

32- Convection equation

و روی مرزها به صورت دلخواه توزیع شوند. در این پژوهش از حالت اول مطابق با شکل ۲ استفاده می‌شود، هر چند که حالت دوم نیز قابل استفاده است. در این رویکرد، پاسخ معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسائل در حالت یک‌بعدی با رابطه زیر تقریب زده می‌شود:

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x - x_j)^2 + C^2} \quad (۶)$$

که در آن  $x_j$  مختصات مراکز محاسباتی و  $N$  تعداد کل آن‌ها می‌باشند.  $\lambda_j$  نیز ضرایب مجهولی هستند که با استفاده از معادلات حاکم در مرزها و نقاط برهم‌نهی<sup>۳۶</sup> به دست می‌آیند. این نقاط خود به دو دسته نقاط مرزی و نقاط داخلی تقسیم می‌شوند. نقاط روی مرز برای اعمال شرایط مرزی مسئله و نقاط درون دامنه برای ارضای معادلات دیفرانسیل حاکم در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۲- نمایش مراکز محاسباتی با توزیع دلخواه برای مسائل یک‌بعدی در روش چندربعی.

در رابطه (۶)،  $C$  متغیر شکل بهینه است که تاکنون تلاش‌های متعددی برای تعیین آن صورت گرفته ولی هنوز هم یک موضوع پژوهشی مورد توجه به شمار می‌رود که یک روش جامع برای تعیین آن تدوین نشده است. در این پژوهش، به منظور صرفه‌جویی در زمان محاسبات یک الگوریتم ساده و کارآمد برای محاسبه آن پیشنهاد می‌شود که برای مسائل زمانی بسیار مناسب است. در این الگوریتم، شرایط اولیه مسئله با تابع چندربعی درون‌یابی می‌شود و متغیر شکلی که دقیق‌ترین

هستند. شرایط مرزی موجود یا از نوع دیریکله<sup>۳۳</sup> (معلوم بودن مقدار غلظت) و یا از نوع نومان<sup>۳۴</sup> (معلوم بودن میزان تغییرات غلظت) در هر مرز هستند. برای شرایط مرزی دیریکله داریم:

$$S_1 : u(0, t) = f_1(t) \quad (۳)$$

$$S_2 : u(L, t) = f_2(t)$$

و برای شرایط مرزی نومان:

$$S_1 : \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(0,t)} = g_1(t) \quad (۴)$$

$$S_2 : \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(L,t)} = g_2(t)$$

در روابط بالا، توابع  $f_1, f_2, g_1, g_2$  مقادیر معینی برحسب زمان هستند. واضح است که ترکیب شرایط مرزی فوق نیز می‌تواند در یک مسئله استفاده شود. همچنین شرط اولیه مسئله مطابق رابطه زیر است:

$$u(x, 0) = h(x) \quad (۵)$$

که در آن  $h(x)$  یک تابع معلوم از مقادیر غلظت در زمان  $t=0$  است.

### ۳- روش چندربعی

این روش اصلی‌ترین زیرمجموعه خانواده توابع پایه شعاعی است که پاسخ‌ها را در فرآیند حل معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی با یک تابع درون‌یاب تخمین می‌زند (روش کانزا). به منظور شبیه‌سازی هندسه، تعداد  $N$  مرکز محاسباتی<sup>۳۵</sup> در میدان مسئله در نظر گرفته می‌شود که با یکدیگر هیچ‌گونه ارتباطی ندارند. بنابراین پیاده‌سازی آن در هندسه‌های پیچیده و مسائل چندبعدی نیز آسان است و هزینه‌های پیش‌پردازش شبکه‌بندی را ندارد. مراکز محاسباتی می‌توانند فقط در درون دامنه یا در درون دامنه

<sup>36</sup>- Collocation points

<sup>33</sup>- Dirichlet

<sup>34</sup>- Neumann

<sup>35</sup>- Computational centers

نقاط کاهش می‌یابد، در ناحیه دوم تعداد نقاط بدون تغییر باقی مانده ( $n_2$ ) و در ناحیه سوم نیز تعداد نقاط با ضرب  $(\beta - 2)$  در  $n_3$  افزایش می‌یابد (جدول ۱). مقدار بهینه ضرب  $\beta$  از بازه  $[0.1, 1]$  انتخاب شده و به‌عنوان ضرب تعداد مراکز محاسباتی عمل می‌نماید. مراکز انطباقی به‌دست‌آمده بر اساس گام معلوم برای محاسبه پاسخ در گام زمانی مجهول استفاده می‌شوند. بدیهی است که در مسائل با پاسخ‌های متقارن کافی است نیمی از دامنه به سه ناحیه تقسیم شود و به نیمه دیگر دامنه تعمیم یابد. با به‌کارگیری الگوریتم انطباقی پیشنهادی، تمرکز نقاط در نواحی با گرادیان‌های زیاد بیشتر شده و در نواحی با گرادیان‌های کم کاهش می‌یابد.

تخمین از آن را داشته باشد، به‌عنوان متغیر شکل بهینه انتخاب می‌گردد. در این روند از معیار خطای جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی<sup>۳۷</sup> پاسخ‌های روش چندربعی نسبت به شرایط اولیه مسئله به‌عنوان معیار ارزیابی استفاده می‌شود. هر متغیر شکلی که خطای متناظر با آن کمینه باشد، متغیر شکل بهینه است. مقدار خطای نامبرده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$RMSRE^j = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{u}(x_i, C^j) - u(x_i))^2 / u(x_i)^2 * 100^2} \quad (7)$$

$j = 1, M$

در این رابطه  $u(x_i)$  مقدار شرایط اولیه مسئله و  $\hat{u}(x_i, C^j)$  مقدار تخمین تابع چندربعی به ازای متغیر شکل  $j$ ام در نقطه محاسباتی  $j$ ام است.

واضح است که به دلیل مستقل بودن متغیر شکل از زمان و عدم محاسبه آن در هر گام زمانی، هزینه‌های محاسباتی اضافی به وجود نمی‌آید.

### ۳-۱- الگوریتم انطباقی توزیع مراکز محاسباتی

در این پژوهش یک روش انطباقی جدید برای توزیع بهینه مراکز محاسباتی در روش چندربعی پیشنهاد می‌شود. معیار کار این الگوریتم بر اساس گرادیان پاسخ‌های مسئله است. بدین‌صورت که ابتدا مقادیر گرادیان پاسخ‌ها بر اساس گام معلوم در تمام نواحی میدان مسئله محاسبه می‌شود، سپس، میدان محاسباتی با توجه به مقدار بیشینه گرادیان‌های به‌دست‌آمده ( $A$ ) و ضرب گرادیان ( $\alpha$ ) به سه ناحیه با گرادیان کم، متوسط و زیاد تقسیم‌بندی می‌شود (جدول ۱). در ادامه، توزیع و تعداد نقاط انطباقی با توجه به یک مجموعه نقاط یکنواخت در نواحی مذکور ( $N = n_1 + n_2 + n_3$ )، بدین‌صورت حاصل می‌شود که در ناحیه اول با ضرب  $\beta$  در  $n_1$  تعداد

<sup>37</sup> - Root Mean Square Relative Error



۳) تقسیم‌بندی میدان به سه ناحیه برحسب ضریب  $\alpha$  و مقدار  $A$ ،

۴) افزایش و کاهش مراکز محاسباتی در نواحی با گرادیان زیاد و کم برحسب ضرایب  $\beta$  و  $2-\beta$ .

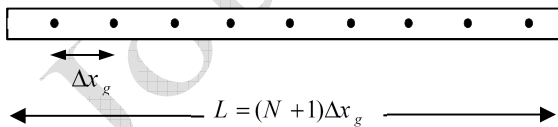
روندنمای روش حل مسئله به روش چنددربعی با استفاده از توزیع مراکز انطباقی در شکل ۳ نشان داده شده است.

مقایسه پاسخ‌ها نیز با استفاده از رابطه جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی صورت خواهد گرفت.

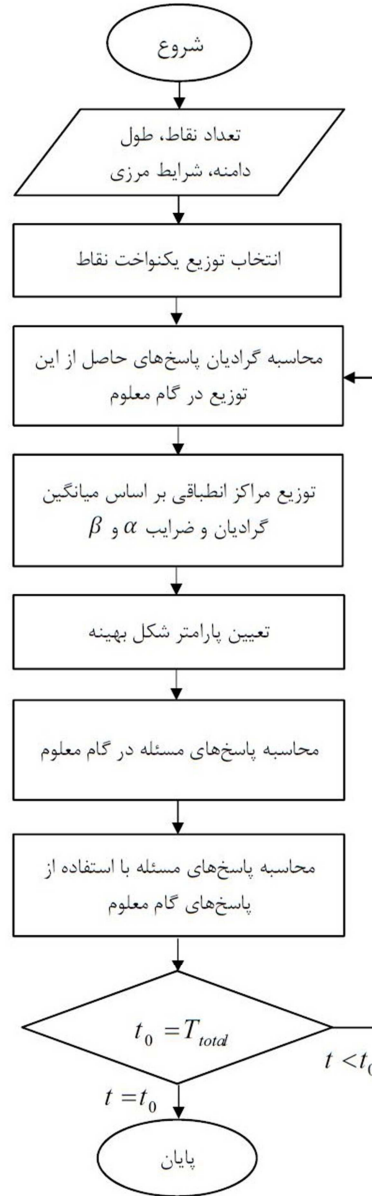
$$RMSRE = \sqrt{1/N \sum_{i=1}^N ((\phi_E^i - \phi_{MQ}^i) / \phi_E^i \times 100)^2} \quad (۸)$$

#### ۴- مثال‌های عددی

در این بخش، سه مثال از معادلات پخش، جابجایی و پخش-جابجایی ارائه می‌گردد. ابتدا این معادلات با روش چنددربعی در حالت توزیع یکنواخت نقاط حل می‌شوند. سپس مسائل برای بار دوم با استفاده از الگوریتم انطباقی پیشنهادی حل می‌شوند. درنهایت، نتایج حاصل از هر دو روش با حل دقیق مقایسه و میزان درصد خطاهای جذر میانگین مربعات آن‌ها گزارش می‌شوند. حالت کلی توزیع تعداد  $N$  نقطه با توزیع یکنواخت محاسباتی و برهم‌نهی به ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ آورده شده است.



شکل ۴- توزیع یکنواخت مراکز محاسباتی در روش چنددربعی.



شکل ۳- روند حل مسئله ناپایا با الگوریتم انطباقی

به‌طور خلاصه می‌توان گفت که برای انطباقی کردن مراکز محاسباتی در رویکرد پیشنهادی مراحل زیر انجام می‌شود:

- ۱) انتخاب یک توزیع یکنواخت با  $N$  مرکز محاسباتی،
- ۲) تعیین گرادیان بیشینه ( $A$ ) پاسخ‌ها در گام زمانی معلوم،

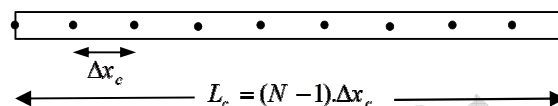
جدول ۱- ناحیه بندی دامنه مسئله به همراه تعداد نقاط انطباقی در الگوریتم پیشنهادی.

ناحیه	گرادیان	محدوده موقعیت نقاط	تعداد نقاط
-------	---------	--------------------	------------

$\beta.n_1$	$x_i < \alpha.A$	کم	۱
$n_2$	$\alpha A < x_i < (1-\alpha).A$	متوسط	۲
$(2-\beta).n_3$	$(1-\alpha).A < x_i < A$	زیاد	۳

به  $\Delta x_e$  و  $\Delta x_g$  به ترتیب برابر  $0.22472$  و  $0.21987$  به دست می‌آیند. برای تعیین متغیر شکل بهینه، همان‌طور که در بخش ۳ اشاره شد، شرایط اولیه مسئله با تابع چندربعی و متغیر شکل‌های مختلف درون‌یابی می‌شود. سپس متغیر شکلی که دقیق‌ترین تخمین از شرایط اولیه را داشته باشد به‌عنوان مقدار بهینه در تمامی گام‌های زمانی استفاده می‌گردد (جدول ۲-). مطابق

جدول ۱، ناحیه بندی دامنه مسئله در هر گام زمانی بر اساس مقادیر حداکثر گرادیان در گام زمانی معلوم قبلی انجام می‌گیرد. برای مثال مورد بحث، مقادیر بهینه ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  نیز به ترتیب برابر  $0.25$  و  $0.5$  تعیین شده است. همچنین خطای حاصل از حل مسئله با توزیع‌های یکنواخت و انطباقی در جدول ۳، ارائه گردیده است. طبق این جدول میزان خطای توزیع انطباقی در مقایسه با توزیع یکنواخت کمتر است. در شکل ۶، توزیع انطباقی نقاط به همراه تعداد آن‌ها، در سه گام زمانی دلخواه نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی منجر به کمتر شدن تعداد نقاط نسبت به حالت یکنواخت و تمرکز بیشتر و کمتر آن‌ها به ترتیب در نواحی با گرادیان‌های بالا و پایین شده است. پاسخ‌های مسئله با توزیع انطباقی در سه گام زمانی متوالی به همراه حل دقیق در شکل ۷ نشان داده شده است. چنانکه ملاحظه می‌شود تعداد مراکز محاسباتی بدست آمده از روش انطباقی پیشنهادی در گام‌های زمانی متوالی، برای یک خطای معین، یکسان نیست. همچنین مقادیر ضریب شکل بهینه بدست آمده در دو روش، به دلیل تغییر فواصل نقاط، برابر نیستند. همچنین ملاحظه می‌شود که با هموار شدن منحنی تعداد نقاط افزایش می‌یابد و به توزیع یکنواخت نزدیکتر می‌شود.



شکل ۵- توزیع یکنواخت نقاط برهم‌نهی در روش چندربعی.

همان‌طور که دیده می‌شود، نقاط برهم‌نهی در داخل دامنه و روی مرزها و نقاط محاسباتی تنها در داخل دامنه توزیع شده‌اند. مراکز محاسباتی می‌توانند روی مرزها نیز قرار بگیرند که در این پژوهش به آن پرداخته نشده است. در ادامه، مثال‌های مورد نظر با به‌کارگیری الگوریتم انطباقی حاضر حل شده و توزیع انطباقی مراکز محاسباتی برای هر مسئله نشان داده می‌شود.

#### ۴-۱- معادله پخش

برای حل معادله پخش، دامنه‌ای به طول  $L = 2$  با شرایط مرزی دیریکله، به‌صورت رابطه (۹) در نظر گرفته شده است. همچنین ضریب پخش برابر  $D = 0.08$  است.

$$S_1 : u(0, t) = 0 \quad (9)$$

$$S_2 : u(L, t) = 0$$

این مسئله دارای حل دقیق به‌صورت رابطه (۱۰) است که برای صحت‌سنجی پاسخ‌ها از آن استفاده می‌شود [۲۶].

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{D(4t+1)}\right] \quad (10)$$

مقادیر شرایط اولیه مسئله نیز با جایگذاری  $t = 0$  در حل دقیق حاصل می‌شود.

در ابتدا مسئله با توزیع تعداد  $N = 90$  مرکز محاسباتی یکنواخت حل می‌شود. در این حالت، مقادیر

#### ۴-۲- معادله جابجایی

برای حل این معادله دامنه‌ای به طول  $L = 4$ ، با شرایط مرزی دیریکله و نومان به ترتیب در مرزهای چپ و راست آن، در نظر گرفته شده است (رابطه ۱۱). همچنین سرعت جابجایی  $V = 0.1$  است:

$$S_1: u(0, t) = 0$$

$$S_2: \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (9)$$

حل دقیق مسئله نیز به صورت رابطه زیر است [۲۲]:

$$u(x, t) = 10 \exp\left[-\frac{(x - x_0 - Vt)^2}{2\rho^2}\right] \quad (10)$$

که در آن مقدار انحراف معیار  $\rho$  برابر ۲۶۴ منظور شده و  $x_0$  محل بیشینه مقدار آلاینده است. در ابتدا مسئله با توزیع یکنواخت تعداد  $N = 90$  نقطه حل شد. در این حالت مقادیر  $\Delta x_c$  و  $\Delta x_g$  به ترتیب برابر  $0.4395$  و  $0.44943$  حاصل می‌شود. در جدول ۴، مقادیر متغیر شکل بهینه برای حل معادله جابجایی در حالت توزیع‌های یکنواخت و انطباقی ارائه شده است. مقادیر بهینه ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  نیز (با آزمون و خطا) به ترتیب برابر  $0.3$  و  $0.55$  برآورد شده‌اند. در شکل‌های ۸ و ۹، به ترتیب توزیع انطباقی مراکز محاسباتی و پاسخ حل انطباقی به همراه حل دقیق مسئله نشان داده شده است. همچنین پاسخ‌های حاصل از حل توزیع‌های یکنواخت و انطباقی با حل دقیق در جدول ۵ مقایسه شده‌اند.

جدول ۴- مقادیر متغیر شکل بهینه در مثال ۲-۴.

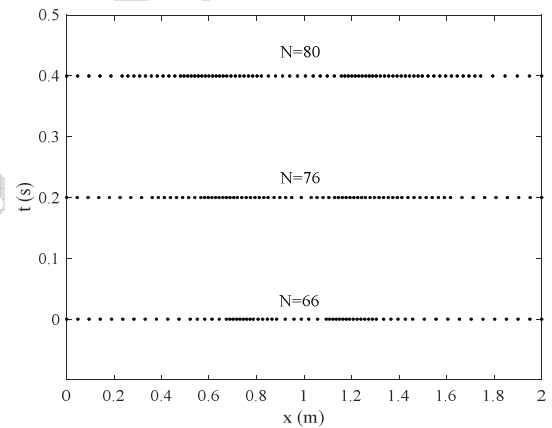
متغیر شکل بهینه (C)	توزیع مراکز محاسباتی
۰/۱۴	انطباقی
۰/۱۱	یکنواخت

جدول ۲- مقادیر متغیر شکل بهینه در مثال ۱-۴.

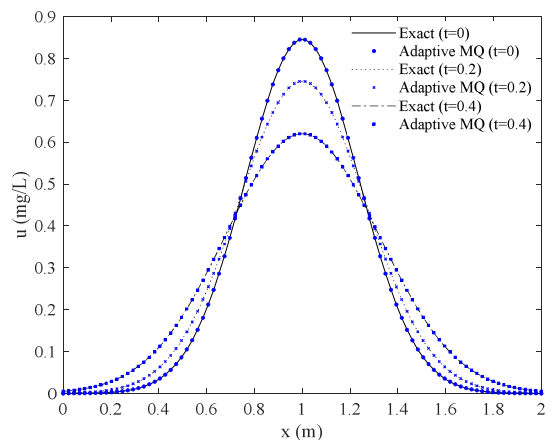
متغیر شکل بهینه (C)	توزیع مراکز محاسباتی
۰/۴	انطباقی
۰/۰۶	یکنواخت

جدول ۳- جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی در مثال ۱-۴.

زمان (t)	RMSRE (%)	
	توزیع انطباقی	توزیع یکنواخت
۰	$4.34 \times 10^{-4}$	$4.64 \times 10^{-2}$
۰/۲	$4.99 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-1}$
۰/۴	$5.96 \times 10^{-4}$	$9.8 \times 10^{-1}$



شکل ۶- نمودار توزیع انطباقی نقاط در مثال ۱-۴.



شکل ۷- پاسخ‌های مثال ۱-۴.

جدول ۵- جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی

در مثال ۴-۲.

RMSRE (%)		زمان (t)
توزیع یکنواخت	توزیع انطباقی	
$۱,۹۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۲,۹۴ \times ۱۰^{-۵}$	۰
$۷,۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۳,۲۶ \times ۱۰^{-۴}$	۴
$۵,۱۱ \times ۱۰^{-۱}$	$۵,۹۶ \times ۱۰^{-۴}$	۸

نمی‌کند و صرفاً جابجا می‌شود لذا تعداد نقاط نیز تغییر نمی‌یابد.

۴-۳- معادله پخش - جابجایی

برای حل این معادله، دامنه‌ای به طول  $L = ۲$  با شرایط مرزی دیریکله در نظر گرفته شده است. این مسئله نیز دارای حل دقیق است که پاسخ‌های بدست آمده با آن صحت سنجی شده‌اند. حل دقیق این معادله در دامنه یک‌بعدی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

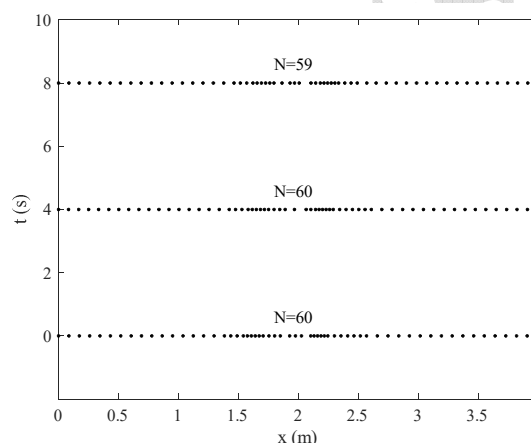
$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(x-1-Vt)^2}{D(4t+1)}\right] \quad (۱۱)$$

و مقادیر شرایط مرزی مسئله عبارت‌اند از:

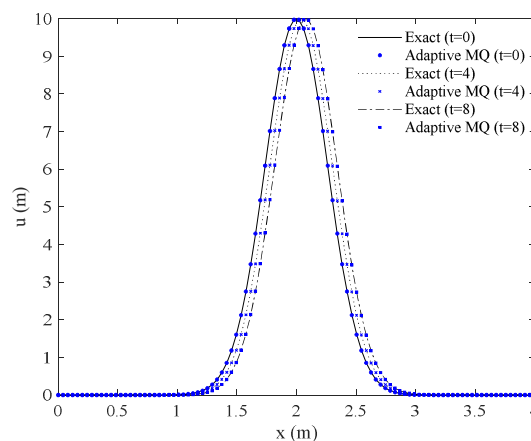
$$S_1: u(0, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(-1-Vt)^2}{D(4t+1)}\right]$$

$$S_2: u(L, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(L-1-Vt)^2}{D(4t+1)}\right] \quad (۱۴)$$

همچنین مقادیر سرعت جابجایی ( $V$ ) و ضریب پخش ( $D$ )، به ترتیب برابر  $۰/۴$  و  $۰/۰۵$  در نظر گرفته شده‌اند. در ابتدا مسئله با تعداد  $N = ۹۰$  مرکز محاسباتی با توزیع یکنواخت حل شد و مقادیر  $\Delta x_c$  و  $\Delta x_g$  به ترتیب برابر با  $۰/۰۲۱۹۸۷$  و  $۰/۰۲۲۴۷۲$  به دست آمد. مقادیر بهینه ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  نیز به ترتیب برابر  $۰/۲۵$  و  $۰/۶$  برآورد شده است. توزیع انطباقی نقاط در شکل ۱۰ و پاسخ حل انطباقی به همراه حل دقیق در شکل ۱۱ نمایش داده شده است. همچنین مقادیر متغیرهای شکل بهینه و خطاهای حاصل از روشهای توزیع‌های انطباقی و یکنواخت به ترتیب در جدول ۶ و جدول ۷ برآورده شده‌اند.



شکل ۸- نمودار توزیع انطباقی نقاط در گامهای زمانی متوالی در مثال ۴-۲.



شکل ۹- پاسخ‌های گامهای زمانی متوالی در مثال ۴-۲.

جدول ۶- مقادیر متغیر شکل بهینه در مثال ۴-۳.

توزیع مراکز محاسباتی	متغیر شکل بهینه (C)
انطباقی	۰/۰۴۵
یکنواخت	۰/۰۲

چنانکه مشاهده می‌شود، در این مثال نیز، دقت توزیع انطباقی، با تعداد نقاط کمتر، از توزیع یکنواخت به مراتب بیشتر است. علاوه بر این، مانند مثال قبل، ضرایب شکل بهینه بدست آمده در دو روش برابر نیستند. همچنین ملاحظه می‌شود که چون شکل منحنی تغییر

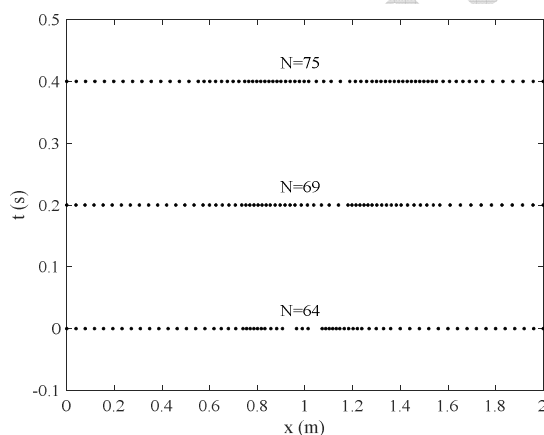
منحنی، تعداد نقاط افزایش می‌یابد و به توزیع یکنواخت نزدیکتر می‌شود.

به طور خلاصه می‌توان گفت که در این روش تقسیم بندی نواحی مختلف دامنه با توجه به مقدار بیشینه گرادیان و یافتن ضرایب بهینه آن ( $\alpha$ ) صورت می‌گیرد. به این منظور، با فرض یک توزیع یکنواخت اولیه، افزایش و کاهش تعداد مراکز محاسباتی در نواحی تقسیم‌شده بر اساس ضریب  $\beta$  انجام می‌گردد. به این منظور در نواحی با گرادیان شدید که به تمرکز بیشتر نقاط نیاز دارند، تعداد مراکز نسبت به حالت یکنواخت با ضریب ( $2-\beta$ ) بیشتر شده و در مقابل در نواحی با گرادیان‌های کمتر، تعداد نقاط با ضریب  $\beta$  کاهش می‌یابد. مقادیر بهینه این ضرائب با آزمون و خطا بدست می‌آیند. علاوه بر این، برای یافتن مقدار بهینه ضریب شکل، شرایط اولیه مسئله با تابع چنددرجی درونیابی می‌شود و متغیر شکلی که دقیق‌ترین تخمین از آن را داشته باشد، به‌عنوان متغیر شکل بهینه برای همه گام‌های زمانی انتخاب می‌گردد.

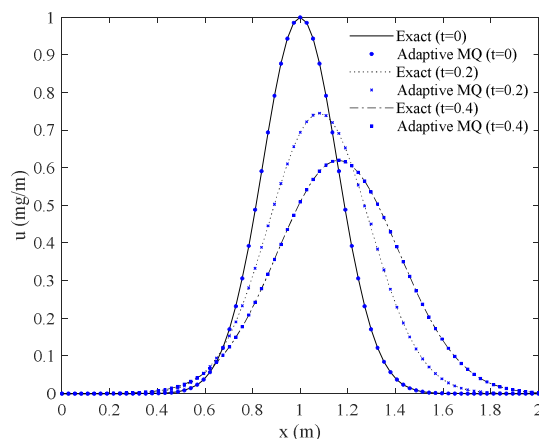
به‌منظور صحت سنجی رویکرد پیشنهادی، مثال‌هایی از معادلات پخش، جابجایی و پخش-جابجایی که دارای کاربرد فراوان در علوم مهندسی آب و هیدرولیک هستند، و به علاوه دارای تغییرات گرادیان کافی در بازه مورد نظر به منظور نمایش کارایی روش پیشنهادی می‌باشند، ارائه شد. نتایج حاکی از کارآمدی چشمگیر روش پیشنهادی در مثالهای حل شده است. به‌عنوان مثال در مسئله جابجایی تعداد نقاط در توزیع انطباقی در زمان صفر،  $0/2$  و  $0/4$  ثانیه، به ترتیب برابر  $60$ ،  $59$  و  $58$  حاصل شده ولی تعداد مراکز توزیع یکنواخت  $90$  است. همچنین مقدار خطای پاسخ‌های توزیع انطباقی نیز در مقایسه با خطاهای حاصل از توزیع یکنواخت به مقدار قابل‌توجهی کاهش یافته است [۲۷].

جدول ۷- جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی در مثال ۳-۴.

RMSRE (%)		زمان ( $t$ )
حل توزیع یکنواخت	حل توزیع انطباقی	
$4.36 \times 10^{-2}$	$4.72 \times 10^{-4}$	۰
$9.17 \times 10^{-2}$	$7.91 \times 10^{-4}$	$0/2$
$1.08 \times 10^{-1}$	$8.65 \times 10^{-4}$	$0/4$



شکل ۱۰- نمودار توزیع انطباقی نقاط در گامهای زمانی متوالی در مثال ۳-۴.



شکل ۱۱- پاسخ‌های گامهای زمانی متوالی در مثال ۳-۴.

نتایج این مثال نیز موید نتایج مثالهای قبلی است. از جدول ۷ ملاحظه می‌شود که به ازای دقت معین تعداد نقاط در توزیع انطباقی از توزیع یکنواخت به میزان قابل توجهی کمتر است. همچنین مانند مثال ۱ با هموار شدن

## ۵- نتیجه‌گیری

دامنه با گرادیان زیاد، متوسط و کم شناسایی می‌شوند. سپس در مناطق با گرادیان زیاد، تعداد مراکز محاسباتی افزایش می‌یابد و بالعکس. برای تعیین متغیر شکل بهینه نیز یک الگوریتم کارا پیشنهاد شد که برای مسائل زمانی بسیار مناسب و کاربردی بوده و منجر به کاهش قابل توجه هزینه‌های محاسباتی می‌شود. نهایتاً نتایج مثالهای عددی نشان داد که به‌کارگیری الگوریتم حاضر باعث افزایش دقت حل مسئله و کاهش تعداد مراکز محاسباتی در مقایسه با توزیع یکنواخت نقاط می‌شود که حاکی از کارآمدی توزیع انطباقی گرادیانی پیشنهادی است.

معمولاً در حل عددی مسائل با تغییرات فیزیکی موضعی زیاد به شبکه یا توزیع مراکز یکنواخت فشرده‌تری برای کاهش خطاها نیاز است که افزایش حجم محاسبات را با خود به دنبال دارد. برای اجتناب از این امر، در این مقاله، یک الگوریتم جدید برای توزیع انطباقی مراکز محاسباتی در روش بدون شبکه چنددربعی برای حل بهینه معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی ناپایا در حالت یک‌بعدی پیشنهاد شد. در این روش برای اولین بار، معیار اصلی این الگوریتم گرادیان یا میزان تغییرات پاسخ‌های مسئله در گام معلوم انتخاب گردید. در این روند ابتدا نواحی مختلف

## مراجع

- [1] Kansa, E. J. (1990). "Multiquadrics- A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates", *Computers & Mathematics with applications*, 19(8-9), 127-145.
- [2] Kindelan, M., Bernal, F., González-Rodríguez, P., & Moscoso, M. (2010). "Application of the RBF meshless method to the solution of the radiative transport equation". *Journal of Computational Physics*, 229(5), 1897-1908.
- [3] Kansa, E. J., & Geiser, J. (2013). "Numerical solution to time-dependent 4D inviscid Burgers' equations". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(3), 637-645.
- [4] Patel, S., & Rastogi, A. K. (2017). "Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system", *Water Resources Management*, 31(9), 2869-2884.
- [5] Babaei, R., Jabbari, E., & Eskandari-Ghadi, M. (2019). "Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams", *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 52(12), 3015-3030.
- [6] Koushki, M., Jabbari, E., & Ahmadiania, M. (2020). "Evaluating RBF methods for solving PDEs using Padua points distribution", *Alexandria Engineering Journal*, 59(5), 2999-3018.
- [7] Mirabi, M.H., Jabbari, E., Rajaei, T. (2022). "Numerical Solution of Steady Incompressible Turbulent Navier–Stokes Equations using Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF) Method", *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 53(12), 5325-5356.
- [8] Fornberg, B., & Wright, G. (2004). "Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter" *Computers & Mathematics with Applications*, 48(5-6), 853-867.
- [9] Xiang, S., Wang, K. M., Ai, Y. T., Sha, Y. D., & Shi, H. (2012). "Trigonometric variable shape parameter and exponent strategy for generalized multiquadric radial basis function approximation". *Applied Mathematical Modelling*, 36(5), 1931-1938.
- [10] Esmailbeigi, M., & Hosseini, M. M. (2014). "A new approach based on the genetic algorithm for finding a good shape parameter in solving partial differential equations by Kansa's method". *Applied Mathematics and Computation*, 249, 419-428.
- [11] Biazar, J., & Hosami, M. (2016). "Selection of an interval for variable shape parameter in approximation by radial basis functions". *Advances in Numerical Analysis*.

- [12] Azarboni, H. R., Keyanpour, M., & Yaghouti, M. (2019). "Leave-Two-Out Cross Validation to optimal shape parameter in radial basis functions". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 100, 204-210.
- [13] Fallah, A., Jabbari, E., & Babaei, R. (2019). "Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization", *Computers & Mathematics with Applications*, 77(3), 815-829.
- [14] Koushki, M., Babaei, R. & Jabbari, E. (2020). "Application of RBF Multiquadric method for solving seepage problems using a new algorithm for Optimization of the shape parameter". *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 52(4), 1009-1024.
- [15] Berger, M. J., & Jameson, A. (1985). "Automatic adaptive grid refinement for the Euler equations", *AIAA journal*, 23(4), 561-568.
- [16] Sarra, S. A. (2005). "Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations", *Applied Numerical Mathematics*, 54(1), 79-94.
- [17] Libre, N. A., Emdadi, A., Kansa, E. J., Shekarchi, M., & Rahimian, M. (2009). "A multiresolution prewavelet-based adaptive refinement scheme for RBF approximations of nearly singular problems", *Engineering analysis with boundary elements*, 33(7), 901-914.
- [18] Biazar, J., & Hosami, M. (2015). "An adaptive meshless method of line based on radial basis functions", *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 5(2), 45-58.
- [19] Kaennakham, S., & Chuathong, N. (2019). "An automatic node-adaptive scheme applied with a RBF-collocation meshless method", *Applied Mathematics and Computation*, 348, 102-125.
- [20] Cavoretto, R., & De Rossi, A. (2020). "An adaptive LOOCV-based refinement scheme for RBF collocation methods over irregular domains", *Applied Mathematics Letters*, 103, 106178.
- [21] Cavoretto, R., & De Rossi, A. (2020). "A two-stage adaptive scheme based on RBF collocation for solving elliptic PDEs", *Computers & Mathematics with Applications*, 79(11), 3206-3222.
- [22] Kolbe, N., & Sfakianakis, N. (2022). "An adaptive rectangular mesh administration and refinement technique with application in cancer invasion models", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 416, 114442.
- [23] Cavoretto, R., De Rossi, A., Sommariva, A., & Vianello, M. (2022). "RBFCUB: A numerical package for near-optimal meshless cubature on general polygons", *Applied Mathematics Letters*, 125, 107704.
- [24] Wei, C., Hu, Q., Li, S., & Shi, X. (2023). "Hydrodynamic interactions and wake dynamics of fish schooling in rectangle and diamond formations", *Ocean Engineering*, 267, 113258.
- [25] Loubère, R., Turpault, R., & Bourriaud, A. (2023). "A MOOD-like compact high order finite volume scheme with adaptive mesh refinement", *Applied Mathematics and Computation*, 443, 127792.
- [26] Sankaranarayanan, S., Shankar, N. J., & Cheong, H. F. (1998). "Three-dimensional finite difference model for transport of conservative pollutants", *Ocean Engineering*, 25(6), 425-442.
- [27] Mohammadalian, S. (2022). "Evaluation of the performance of adaptive point distribution algorithms in Multiquadric radial basis functions meshfree methods in solving 1-D and 2-D problems", MSc. Thesis, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.