





University Of Qom



## A New Adaptive Algorithm for the Optimal Distribution of Computational Centers in the Meshless Multiquadric Method

Samira Mohammad Alian<sup>1</sup>, Reza Babae<sup>2</sup> , Ehsan Jabbari<sup>3</sup> 

1. Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran. E-mail: [samira.aliyan76@yahoo.com](mailto:samira.aliyan76@yahoo.com)
2. Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran. E-mail: [r.babae@stu.qom.ac.ir](mailto:r.babae@stu.qom.ac.ir)
3. Corresponding author, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran. E-mail: [e.jabbari@qom.ac.ir](mailto:e.jabbari@qom.ac.ir)

### Article Info

**Article type:**  
Research Article

**Article history:**  
Received 04 Aug 2022  
Revised 21 Jan 2023  
Accepted 22 Jan 2023

**Keywords:**  
Meshless Method,  
Radial Basis Functions,  
Multiquadric-Method,  
Adaptive Algorithm.

### ABSTRACT

*The computational centers in the multiquadric radial basis functions meshless method have high adaptability considering the lack of geometric and physical connection between the centers. In this research, a new adaptive algorithm is proposed based on the gradients of the physical variables of the problem with the aim of creating an optimal distribution. The resulted adaptive distribution generated by this algorithm improves significantly the accuracy and speed of the multiquadric method compared to the uniform distribution in steady and unsteady problems. In this approach, firstly, the domains with low and high physical variations are identified in a known time step, then the number of computational centers decreases and increases in these areas, respectively. Thus, the centers will be distributed more compact where needed and will be eliminated where not. Facing another important challenge of the multiquadric method, i.e. determining the optimal shape parameter, a simple and efficient method is introduced in such a way that there is no need to optimize the shape parameter at each time step and the computational costs are controlled. Finally, the effectiveness of the proposed method is shown by solving examples of diffusion, convection and convection-diffusion equations. The results are compared to their uniform distributions by measuring their efficiency and to the exact solution by evaluating the accuracy.*

**Cite this article:** Mohammad Alian, Samira., Babae, Reza., & Jabbari, Ehsan. (2023). A New Adaptive Algorithm for the Optimal Distribution of Computational Centers in the Meshless Multiquadric Method. *Civil Infrastructure Researches*, 9(1), 161-173. <https://doi.org/10.22091/cer.2023.8470.1419>





## یک الگوریتم انطباقی جدید برای توزیع بهینه مراکز محاسباتی در روش بدون شبکه چندربعی

سمیرا محمدعلیان<sup>۱</sup>، رضا بابایی<sup>۲</sup>، احسان جباری<sup>۳</sup> ✉

۱. دانش‌آموخته کارشناسی‌ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: [samira.aliyan76@yahoo.com](mailto:samira.aliyan76@yahoo.com)

۲. دانش‌آموخته دکتری، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: [r.babae@stu.qom.ac.ir](mailto:r.babae@stu.qom.ac.ir)

۳. نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: [e.jabbari@qom.ac.ir](mailto:e.jabbari@qom.ac.ir)

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۱۳

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۱/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۰۲

### کلیدواژه‌ها:

روش بدون شبکه،

توابع پایه شعاعی،

روش چندربعی،

الگوریتم انطباقی،

گرادیان.

### چکیده

مراکز محاسباتی در روش توابع پایه شعاعی بدون شبکه چندربعی به علت عدم ارتباط هندسی و فیزیکی با یکدیگر دارای قابلیت انطباق‌پذیری بالا و لذا مناسب برای اعمال توزیع‌های انطباقی هستند. در این پژوهش، برای اولین بار یک الگوریتم انطباقی جدید بر مبنای تغییرات (گرادیان) متغیرهای فیزیکی مسئله با هدف ایجاد یک توزیع بهینه پیشنهاد شده است. توزیع انطباقی این الگوریتم، دقت و سرعت روش چندربعی را نسبت به توزیع یکنواخت در مسائل ناپایا به میزان قابل توجهی بهبود می‌بخشد. در این رویکرد نواحی با تغییرات فیزیکی کم و زیاد در گام زمانی معلوم شناسایی می‌شوند و تعداد مراکز محاسباتی به ترتیب در آن‌ها کاهش و افزایش می‌یابد. بنابراین نیاز به یک توزیع فشرده یکنواخت در سراسر میدان به منظور کاهش خطا در نواحی با تغییرات فیزیکی زیاد از بین می‌رود. در مواجهه با دیگر چالش مهم روش چندربعی یعنی تعیین متغیر شکل بهینه نیز یک روش ساده و کارآمد به‌گونه‌ای معرفی می‌شود که به بهینه‌سازی متغیر شکل در هر گام زمانی نیاز نباشد و هزینه‌های محاسباتی کنترل گردد. در پایان، کارایی روش پیشنهادی با ارائه مثال‌هایی از معادلات پخش، جابجایی و پخش-جابجایی برای مقایسه با توزیع‌های یکنواخت و سنجش میزان سرعت و دقت آن‌ها با حل دقیق نشان داده می‌شود.

استناد: محمدعلیان، سمیرا؛ بابایی، رضا؛ جباری، احسان. (۱۴۰۲). یک الگوریتم انطباقی جدید برای توزیع بهینه مراکز محاسباتی در روش بدون شبکه چندربعی. *پژوهش‌های زیرساخت‌های عمرانی*. ۱۹(۱)، ۱۶۱-۱۷۳. <https://doi.org/10.22091/cer.2023.8470.1419>



## ۱- مقدمه

استفاده کردند. ایشان متغیرهایی مانند ناهمگنی و شرایط مرزی با هد متغیر را در نظر گرفتند و مسئله تحلیل حساسیت را بر روی متغیرهایی مانند اندازه گام زمانی، تراکم مراکز محاسباتی و اندازه میدان بررسی نمودند. در نهایت، با توجه به نتایج عددی به دست آمده مشخص شد که روش چندربعی می‌تواند به‌عنوان یک شبیه‌ساز بهینه در شبیه‌سازی آب‌های زیرزمینی به‌کار برده شود [۴].

بابایی و همکاران روش چندربعی را برای حل معادله هلمهولتز<sup>۸</sup> به‌منظور آنالیز امواج لرزه‌ای در مخازن سدهای صلب به کار بردند. در این پژوهش دقت بالای روش حاضر طی دو مثال مختلف به ترتیب با و بدون در نظر گرفتن اثر جذب رسوبات کف مخزن در مقایسه با حل‌های دقیق نشان داده شد. دقت بالای این رویکرد به دلایلی همچون ایجاد یک تابع تخمین پیوسته در کل دامنه مسئله و استفاده از یک الگوریتم کارا برای پیدا کردن متغیر شکل بهینه مربوط می‌شود [۵]. کوشکی و همکاران، برای اولین بار از توزیع نقاط پادوا<sup>۹</sup> در فضای دوبعدی مربعی‌شکل برای حل معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی با استفاده از روش‌های توابع پایه شعاعی (چندربعی، چندربعی معکوس<sup>۱۰</sup> و غیره) استفاده نمودند. نتایج ایشان نشان می‌دهد که توزیع پادوا در اکثر موارد با کم‌ترین تعداد نقاط محاسباتی بالاترین دقت را دارد. همچنین توزیع نقاط پادوا در ترکیب با سایر توزیع‌ها دقت پاسخ‌ها را افزایش می‌دهد [۶]. میرابی و همکاران اقدام به حل معادلات تراکم‌ناپذیر جریان پایا شامل معادلات پیوستگی، ناویراستوکس و مدل آشفتگی  $k - \epsilon$  استاندارد برای یک میدان حفره با درپوش متحرک مربعی نمودند [۷]. آنها با ارزیابی سرعت در هر دو جهت، فشار استاتیکی، انرژی جنبشی آشفته و استهلاك انرژی آشفته نتیجه گرفتند که با اتخاذ فرض استقلال مقادیر متغیر شکل بهینه برای هر

روش‌های بدون شبکه<sup>۱</sup> در دهه‌های اخیر در زمینه‌های ریاضیات کاربردی و علوم مهندسی موردتوجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته‌اند. یکی از مزایای اصلی روش‌های بدون شبکه این است که به هزینه‌های محاسباتی پیش‌پردازش شبکه به‌خصوص در مسائل سه‌بعدی نیاز ندارند. یکی از روش‌های بدون شبکه مشهور، روش چندربعی ( $MQ^2$ ) است که عضو اصلی خانواده توابع پایه شعاعی ( $RBF^3$ ) به‌شمار می‌رود. کانزا<sup>۴</sup> در سال ۱۹۹۰ این روش را برای اولین بار جهت حل معادلات مشتق جزئی از جمله بیضوی، سهموی و هذلولوی به‌کار گرفت که به نام روش کانزا نیز شهرت یافت [۱]. این روش، دقت قابل‌قبول و انعطاف‌پذیری بالایی برای حل انواع مسائل در مهندسی آب نیز داشته است. کیندلان<sup>۵</sup> و همکاران، جهت حل معادلات جابه‌جایی ناپایا از روش چندربعی استفاده نمودند. ایشان همچنین، مزایای این روش از جمله کاربرد آسان، دقت بالا، انعطاف‌پذیری در دامنه‌های نامنظم و بسط آسان به ابعاد بالا (سه‌بعدی) را نیز نشان دادند که در مقابل، معایبی مانند ایجاد ماتریس‌های پر نیز وجود دارد [۲]. کانزا و همکاران، معادله برگرز<sup>۶</sup> غیرلج سه‌بعدی را با روش چندربعی حل نمودند. در این پژوهش از روش تجزیه دامنه<sup>۷</sup> استفاده شد. با به‌کارگیری این روش، پیچیدگی هندسی دامنه‌های بزرگ کاهش پیدا کرده و به ساختارهای ساده‌تر تبدیل می‌شود. همچنین با این فن تعداد قابل‌توجهی درایه صفر در ماتریس ضرایب ایجاد خواهد شد [۳]. محققان از روش چندربعی برای شبیه‌سازی آبخوان‌های نامنظم زیرزمینی

1- Meshless methods

2- Multiquadric

3- Radial Basis Function (RBF)

4- Kansa

5- Kindelan

6- Burgers' equation

7- Domain decomposition

8- Helmholtz

9- Padua points distribution

10- Inverse multiquadric

متغیر شکل بهینه در حل مسائل تراوش<sup>۱۴</sup> با استفاده از روش چندربعی ارائه دادند. در این الگوریتم، از روش نصف کردن بازه متغیر شکل برای افزایش سرعت همگرایی استفاده شده و حدودی برای کران بالا و پایین بازه متغیر شکل پیشنهاد شده است. در این رویکرد، متغیر شکل بهینه مقداری است که تغییرات پاسخ مسئله نسبت به تغییرات آن کمینه باشد [۱۳]. کوشکی و همکاران، با استفاده از الگوریتم ژنتیک، روند دستیابی به متغیر شکل بهینه را برای حل معادله لاپلاس<sup>۱۵</sup> در مسئله تراوش ارائه کردند. در این رویکرد مقدار متغیر شکل بهینه مستقل از تعداد نقاط محاسباتی است. این رویکرد برای مسائل ناپایا مناسب نیست، چراکه حجم محاسبات برای تعیین مقدار بهینه متغیر شکل در گام‌های زمانی بالا می‌رود [۱۴].

موضوع مهم دیگر در روش چندربعی، توزیع مراکز محاسباتی آن است و اگر این توزیع به‌طور بهینه انجام گیرد، به سرعت و دقت حل مسئله می‌افزاید. به این منظور، الگوریتم‌های انطباقی<sup>۱۶</sup> (تطبیقی، وقفی یا سازگار) مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته‌اند. از آنجاکه تعداد المان‌ها یا تعداد نقاط در مسائل واقعی و به ویژه سه‌بعدی بسیار زیاد است و به دلیل تأثیر توان دوم آن بر حجم و زمان محاسبات، یک چالش مهم تلقی می‌شود، لذا هر روش و به‌کارگیری هر مفهومی که به کاهش تعداد این المان‌ها یا نقاط مورد نیاز بیانجامد از اهمیت فراوانی برخوردار است. روش‌های تطبیقی، ابتدا در روش‌های باشبکه توسعه یافتند، سپس با مورد توجه قرار گرفتن و توسعه یافتن روش‌های بدون شبکه، به علت پیاده‌سازی آسان و کاهش حجم محاسبات، در این روش‌ها نیز به‌کار گرفته شدند. اما تاکنون مطالعات معدودی برای معرفی و به‌کارگیری الگوریتم‌های انطباقی در روش‌های بدون

میدان جریان در اعداد رینولدز مختلف مورد مطالعه، می‌توان به یک الگوی قابل پیش‌بینی برای مجموعه ضرائب مجهول  $\lambda$  در سایر اعداد رینولدز داخل بازه مورد نظر، دست یافت.

نکته مهم دیگر در روش چندربعی آن است که دقت این روش تا حد زیادی به متغیر شکل<sup>۱۱</sup> آن وابسته است. فرنبرگ<sup>۱۲</sup> و همکاران، با استفاده از یک الگوریتم جدید، مشکل روش چندربعی را هنگامی که متغیر شکل به مقادیر عددی بزرگ میل پیدا می‌کند، حل نمودند. [۸]. ژیانگ<sup>۱۳</sup> و همکاران در سال ۲۰۱۲ با ارائه یک رابطه مثلثاتی برای متغیر شکل و نمایی کردن تابع چندربعی در حل مسائل مقدار مرزی یک‌بعدی و دوبعدی بیضوی توانستند دقت آن را بهبود بخشند [۹]. اسماعیل بیگی و همکاران در سال ۲۰۱۴ از الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی متغیر شکل، روش چندربعی استفاده کردند. ایشان با حل معادلات دیفرانسیل معمولی نتیجه گرفتند که متغیر شکل به‌دست آمده در مقایسه با دیگر روابط متغیر شکل متغیر، نتایج قابل‌قبولی ارائه می‌دهد [۱۰]. بی‌آزار و همکاران، با استفاده از الگوریتم جدیدی ضرایب ثابت روابط تجربی متغیر شکل متغیر را تعیین کردند. نتایج ایشان نشان داد که ضرایب به‌دست آمده دقت روش چندربعی را افزایش می‌دهند، اما به دلیل استفاده از سعی و خطا به هزینه محاسباتی بالایی نیازمند است [۱۱]. آذرینی و همکاران، یک الگوریتم با دقت بالا برای تعیین متغیر شکل بهینه ارائه دادند. در این روش، مسئله با تعداد  $N-2$  و  $N$  نقطه محاسباتی به ازای متغیر شکل‌های مختلف حل می‌شود و آن متغیری که کمترین اختلاف بین دو جواب را ارائه دهد، متغیر شکل بهینه است [۱۲]. فلاح و همکاران، از یک الگوریتم جدید برای پیدا کردن

<sup>14</sup>- Seepage

<sup>15</sup>- Laplace

<sup>16</sup>- Adaptive algorithm

<sup>11</sup>- Shape parameter

<sup>12</sup>- Fornberg

<sup>13</sup>- Xiang

گره‌هایی به مناطق با خطاهای بیشتر اضافه می‌کند و در نواحی با خطاهای کمتر، تعداد گره‌ها را کم می‌نماید. این الگوریتم نتایج خوبی را از نظر دقت نتایج و عدد شرط ماتریس به دست داده است [۱۹]. کاورتو و روسی<sup>۲۱</sup>، یک طرح انطباقی را جهت حل مسائل مقدار مرزی بیضوی، معادلات پواسون<sup>۲۲</sup> و هلمهولتز<sup>۲۳</sup> در دامنه‌های نامنظم یا L شکل برای توابع پایه شعاعی ارائه نمودند [۲۰]. ایشان همچنین یک الگوریتم انطباقی دومرحله‌ای جدید را نیز برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از روش توابع پایه شعاعی پیشنهاد کردند. در این روش، در مرحله اول از یک شاخص خطا استفاده می‌شود تا مشخص گردد که کدام نواحی باید با افزایش مراکز محاسباتی تصحیح شوند. در مرحله دوم از یک طرح نمونه‌برداری باقی‌مانده انطباقی<sup>۲۴</sup> نیز جهت اصلاح بیشتر برخی از قسمت‌های دامنه استفاده شده است. به‌طور کلی ترکیب این دو مرحله منجر به بهبود دقت بیشتر روش در مقایسه با کاربرد هریک به‌تنهایی شده است. البته این کاربرد ترکیبی موجب افزایش زمان محاسباتی نیز می‌شود [۲۱]. محققان روشی را برای ریزکردن شبکه‌ها ارائه کردند که برای میدان‌های یک، دو و سه‌بعدی کاربرد دارد. آنها این تکنیک را برای شبیه‌سازی رشد سلول‌های سرطانی به‌کار بردند [۲۲]. کاورتو و همکاران تکنیک‌های مرتبه سه را برای محاسبه انتگرال‌ها در محاسبات مربوط به توابع پایه شعاعی مورد استفاده قرار دادند [۲۳]. آنها روش اعتبارسنجی حذفی متقاطع را برای بهینه‌سازی متغیر شکل به‌کار گرفتند. چنگ و همکاران با استفاده از چنین شبکه‌هایی و مفاهیم توابع پایه شعاعی، حرکت گروهی ماهی‌ها را شبیه‌سازی کردند [۲۴]. همچنین پژوهشگران با استفاده از یک شبکه انطباقی احجام محدود جدید،

شبکه انجام شده است. به ویژه در روش چندربعی این مطالعات بسیار محدود است. علاوه بر این استفاده از مفهوم گرادیان در تعریف توزیع انطباقی به شیوه‌ای که در این مقاله ارائه خواهد شد، برای اولین بار صورت می‌گیرد. در سال ۱۹۸۵ برگر<sup>۱۷</sup> و همکاران، یک روش اصلاح شبکه انطباقی برای حل معادلات دو بعدی اوپلر<sup>۱۸</sup> ارائه نمودند. این روش ساده برای کشف نواحی با خطای بالا ارائه شده و با کوچک کردن اندازه شبکه در آن نواحی هزینه محاسبات را کاهش می‌دهد. البته شبکه‌های استفاده شده مستطیل‌شکل هستند و برای میدان‌هایی با هندسه پیچیده کاربردی ندارند [۱۵]. سارا<sup>۱۹</sup>، با استفاده از روش‌های بدون شبکه توابع پایه شعاعی یک الگوریتم انطباقی برای توزیع مراکز محاسباتی معرفی نمود. ایشان مثال‌های عددی از معادله زمانی برگرز و معادله جابه‌جایی یک‌بعدی با تغییرات سریع ارائه داد و نتیجه گرفت که با الگوریتم انطباقی مراکز کمتری نسبت به توزیع یکنواخت نقاط مورد نیاز است [۱۶]. لیبر<sup>۲۰</sup> و همکاران، با بررسی سرعت همگرایی در روش چندربعی، ثابت نمودند که اگر از نقاط انطباقی در حل مسئله استفاده گردد، دقت بیشتری نسبت به توزیع غیرانطباقی توأم با کاهش تعداد نقاط حاصل می‌شود [۱۷]. بی‌آزار و همکاران، یک روش انطباقی با عنوان توزیع برابر، برای انتخاب مجموعه‌ای از نقاط معرفی کردند. براساس این روش، در مجموعه نقاط دامنه، نسبت بزرگترین فاصله به کوچکترین فاصله باید از مقدار معینی کوچک‌تر باشد. ایشان نشان دادند که با چنین توزیع انطباقی، یک حل تقریبی دقیق‌تر حاصل می‌شود [۱۸]. در سال ۲۰۱۹ پژوهشگران، یک الگوریتم خودکار انطباقی توزیع نقاط را برای استفاده در روش چندربعی به‌کار گرفتند. الگوریتم پیشنهادی آن‌ها

21- Cavoretto &amp; Rossi

22- Poisson equation

23- Helmholtz equation

24- Adaptive residual subsampling

17- Berger

18- Euler

19- Sarra

20- Libre

یک روش ساده و کارآمد معرفی می‌شود تا هزینه محاسباتی اضافی در حل مسائل به ویژه در بهینه کردن آن در هر گام زمانی ایجاد نگردد.

## ۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

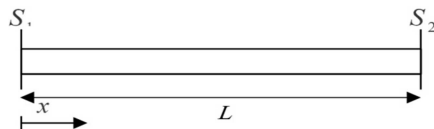
معادله پخش- جابه‌جایی<sup>۲۵</sup>، جزو معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی<sup>۲۶</sup> از نوع سهموی<sup>۲۷</sup> است. این معادله در بسیاری از پدیده‌های مهندسی مانند دینامیک سیالات محاسباتی<sup>۲۸</sup>، هیدرودینامیک، امواج شوک، انتقال حرارت و غیره کاربرد دارد و فرم کلی آن در حالت یک‌بعدی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

که در آن  $t$ ،  $x$  و  $u$  به ترتیب زمان، فاصله از مبدأ مختصات و میزان غلظت آلاینده هستند. همچنین داریم:

$$0 \leq x \leq L \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

که در آن  $L$  و  $T$  طول دامنه محاسباتی و زمان کل محاسبات نامیده می‌شوند.



شکل ۱- نمایش حالت کلی میدان یک‌بعدی در حل مسائل

ضرایب ثابت مثبت  $V$  و  $D$  نیز به ترتیب بیانگر سرعت جابه‌جایی و ضریب پخش آلاینده هستند. اگر متغیرهای  $V$  و  $D$ ، به‌طور مجزا برابر صفر در نظر گرفته شوند، رابطه (۱)، به ترتیب به معادله پخش<sup>۲۹</sup> و معادله جابه‌جایی<sup>۳۰</sup> تبدیل می‌شود. در دامنه محاسباتی یک‌بعدی نشان داده شده در شکل ۱،  $S_1$  و  $S_2$  بیانگر شرایط مرزی

تقریب‌های مراتب بالاتر پاسخ یک دستگاه معادلات بقای هذلولوی چندبعدی را ارائه نمودند [۲۵]. این روش شامل هم محدودیت‌های روش حجم محدود و روندهای ریزکردن شبکه و نیز مزیت معیارهای تعیین مرتبه بهینه چندبعدی است.

همان‌طور که ملاحظه شد، الگوریتم‌های انطباقی طی سال‌های اخیر به‌منظور شبیه‌سازی میدان و مرزها در روش‌های عددی موردتوجه پژوهشگران قرار داشته‌اند تا بتوانند مسائل را با دقت و زمان بهینه‌تری حل نمایند. در این راستا، کارهای چندانی در روش‌های توابع پایه شعاعی به‌ویژه روش چنددرجی انجام نشده و همچنان امکان یافتن الگوریتم‌های بهینه به‌خصوص در مسائل وابسته به زمان وجود دارد. در این راستا، در پژوهش حاضر، یک الگوریتم انطباقی جدید برای روش چنددرجی پیشنهاد شده است. این الگوریتم بر مبنای تغییرات یا گرادیان پاسخ‌ها تدوین شده است. در این رویکرد، مناطق مختلف دامنه با گرادیان زیاد و کم شناسایی شده و به ترتیب مراکز محاسباتی بیشتر و کمتری به آن‌ها اختصاص داده می‌شود. بدین ترتیب توزیع بهینه‌ای از مراکز محاسباتی ایجاد می‌شود و امکان حل مسائل با هزینه محاسباتی کمتر توأم با حفظ یا افزایش دقت نسبت به توزیع‌های یکنواخت به‌وجود می‌آید. از آنجاکه مراکز محاسباتی روش بدون شبکه چنددرجی مانند سایر توابع پایه شعاعی نیاز به پیوستگی یا ارتباطی خاص با یکدیگر ندارند، می‌توان به‌راحتی تعداد آن‌ها را در نواحی با گرادیان‌های مختلف تغییر داد و به یک توزیع بهینه دست یافت. در این مطالعه، به‌منظور بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی، حل معادلات ناپایای پخش، جابه‌جایی و پخش- جابه‌جایی مدنظر قرار گرفته‌اند. پس از حل این مسائل با توزیع مراکز محاسباتی یکنواخت و انطباقی، هزینه محاسبات آن‌ها مقایسه می‌شود. همچنین دقت پاسخ‌های هر مسئله با حل تحلیلی مختص به آن ارزیابی می‌گردد. لازم به ذکر است که برای انتخاب متغیر شکل بهینه نیز

<sup>25</sup>- Convection-Diffusion equation

<sup>26</sup>- Partial Differential Equation (PDE)

<sup>27</sup>- Parabolic

<sup>28</sup>- Computational Fluid Dynamics (CFD)

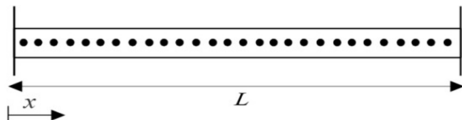
<sup>29</sup>- Diffusion equation

<sup>30</sup>- Convection equation

و روی مرزها به صورت دلخواه توزیع شوند. در این پژوهش از حالت اول مطابق با شکل ۲ استفاده می‌شود، هر چند که حالت دوم نیز قابل استفاده است. در این رویکرد، پاسخ معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسائل در حالت یک‌بعدی با رابطه زیر تقریب زده می‌شود:

$$u(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x - x_j)^2 + C^2} \quad (۶)$$

که در آن  $x_j$  مختصات مراکز محاسباتی و  $N$  تعداد کل آن‌ها می‌باشند.  $\lambda_j$  نیز ضرایب مجهولی هستند که با استفاده از معادلات حاکم در مرزها و نقاط برهم‌نهی<sup>۳۴</sup> به دست می‌آیند. این نقاط خود به دو دسته نقاط مرزی و نقاط داخلی تقسیم می‌شوند. نقاط روی مرز برای اعمال شرایط مرزی مسئله و نقاط درون دامنه برای ارضای معادلات دیفرانسیل حاکم در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۱- نمایش مراکز محاسباتی با توزیع دلخواه برای مسائل یک‌بعدی در روش چنددربعی

در رابطه (۶)،  $C$  متغیر شکل بهینه است که تاکنون تلاش‌های متعددی برای تعیین آن صورت گرفته ولی هنوز هم یک موضوع پژوهشی مورد توجه به شمار می‌رود که یک روش جامع برای تعیین آن تدوین نشده است. در این پژوهش، به منظور صرفه‌جویی در زمان محاسبات یک الگوریتم ساده و کارآمد برای محاسبه آن پیشنهاد می‌شود که برای مسائل زمانی بسیار مناسب است. در این الگوریتم، شرایط اولیه مسئله با تابع چنددربعی درون‌یابی می‌شود و متغیر شکلی که دقیق‌ترین تخمین از آن را داشته باشد، به عنوان متغیر شکل بهینه انتخاب می‌گردد. در این روند از معیار خطای جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی<sup>۳۵</sup> پاسخ‌های روش چنددربعی نسبت به شرایط

هستند. شرایط مرزی موجود یا از نوع دیریکله<sup>۳۱</sup> (معلوم بودن مقدار غلظت) و یا از نوع نومان<sup>۳۲</sup> (معلوم بودن میزان تغییرات غلظت) در هر مرز هستند. برای شرایط مرزی دیریکله داریم:

$$S_1 : u(0, t) = f_1(t) \quad (۳)$$

$$S_2 : u(L, t) = f_2(t)$$

و برای شرایط مرزی نومان:

$$S_1 : \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = g_1(t) \quad (۴)$$

$$S_2 : \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L,t)} = g_2(t)$$

در روابط بالا، توابع  $f_1$ ،  $f_2$ ،  $g_1$  و  $g_2$  مقادیر معینی برحسب زمان هستند. واضح است که ترکیب شرایط مرزی فوق نیز می‌تواند در یک مسئله استفاده شود. همچنین شرط اولیه مسئله مطابق رابطه زیر است:

$$u(x, 0) = h(x) \quad (۵)$$

که در آن  $h(x)$  یک تابع معلوم از مقادیر غلظت در زمان  $t=0$  است.

### ۳- روش چنددربعی

این روش اصلی‌ترین زیرمجموعه خانواده توابع پایه شعاعی است که پاسخ‌ها را در فرآیند حل معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی با یک تابع درون‌یاب تخمین می‌زند (روش کانزا). به منظور شبیه‌سازی هندسه، تعداد  $N$  مرکز محاسباتی<sup>۳۳</sup> در میدان مسئله در نظر گرفته می‌شود که با یکدیگر هیچ‌گونه ارتباطی ندارند. بنابراین پیاده‌سازی آن در هندسه‌های پیچیده و مسائل چندبعدی نیز آسان است و هزینه‌های پیش‌پردازش شبکه‌بندی را ندارد. مراکز محاسباتی می‌توانند فقط در درون دامنه یا در درون دامنه

<sup>31</sup> - Dirichlet

<sup>32</sup> - Neumann

<sup>33</sup> - Computational centers

<sup>34</sup> - Collocation points

<sup>35</sup> - Root Mean Square Relative Error

مسئله محاسبه می‌شود. سپس میدان محاسباتی با توجه به مقدار بیشینه گرادیان‌های به‌دست‌آمده (A) و ضریب گرادیان ( $\alpha$ ) به سه ناحیه با گرادیان کم، متوسط و زیاد تقسیم‌بندی می‌شود (جدول ۱). در ادامه، توزیع و تعداد نقاط انطباقی با توجه به یک مجموعه نقاط یکنواخت در نواحی مذکور ( $N = n_1 + n_2 + n_3$ )، بدین‌صورت حاصل می‌شود که در ناحیه اول با ضرب  $\beta$  در  $n_1$  تعداد نقاط کاهش می‌یابد، در ناحیه دوم تعداد نقاط بدون تغییر باقی مانده ( $n_2$ ) و در ناحیه سوم نیز تعداد نقاط با ضرب  $(2-\beta)$  در  $n_3$  افزایش می‌یابد (جدول ۱). مقدار بهینه ضریب  $\beta$  از بازه [۰/۱ و ۱] انتخاب شده و به‌عنوان ضریب تعداد مراکز محاسباتی عمل می‌نماید. مراکز انطباقی به‌دست‌آمده براساس گام معلوم برای محاسبه پاسخ در گام زمانی مجهول استفاده می‌شوند. بدیهی است که در مسائل با پاسخ‌های متقارن کافی است نیمی از دامنه به سه ناحیه تقسیم شود و به نیمه دیگر دامنه تعمیم یابد. با به‌کارگیری الگوریتم انطباقی پیشنهادی، تمرکز نقاط در نواحی با گرادیان‌های زیاد بیشتر شده و در نواحی با گرادیان‌های کم کاهش می‌یابد.

جدول ۱- ناحیه‌بندی دامنه مسئله به همراه تعداد نقاط انطباقی در الگوریتم پیشنهادی

ناحیه	گرادیان	محدوده موقعیت نقاط	تعداد نقاط
۱	کم	$x_i < \alpha.A$	$\beta.n_1$
۲	متوسط	$\alpha.A < x_i < (1-\alpha).A$	$n_2$
۳	زیاد	$(1-\alpha).A < x_i < A$	$(2-\beta).n_3$

(۴) افزایش و کاهش مراکز محاسباتی در نواحی با گرادیان زیاد و کم برحسب ضرایب  $2-\beta$  و  $\beta$ . روندنمای روش حل مسئله به روش چندربعی با استفاده از توزیع مراکز انطباقی در شکل ۳ نشان داده شده است. مقایسه پاسخ‌ها نیز با استفاده از رابطه جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی صورت خواهد گرفت.

اولیه مسئله به‌عنوان معیار ارزیابی استفاده می‌شود. هر متغیر شکلی که خطای متناظر با آن کمینه باشد، متغیر شکل بهینه است. مقدار خطای نامبرده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$RMSRE^j = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((\hat{u}(x_i, C^j) - u(x_i)) / u(x_i))^2} \quad (7)$$

$j = 1, M$

در این رابطه  $u(x_i)$  مقدار شرایط اولیه مسئله و  $\hat{u}(x_i, C^j)$  مقدار تخمین تابع چندربعی به ازای متغیر شکل  $\lambda$ م در نقطه محاسباتی  $\lambda$ م است.

واضح است که به دلیل مستقل بودن متغیر شکل از زمان و عدم محاسبه آن در هر گام زمانی، هزینه‌های محاسباتی اضافی به وجود نمی‌آید.

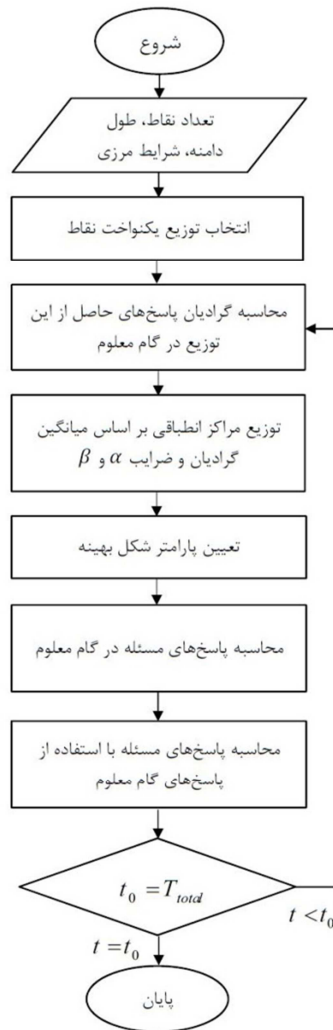
### ۳-۱- الگوریتم انطباقی توزیع مراکز محاسباتی

در این پژوهش یک روش انطباقی جدید برای توزیع بهینه مراکز محاسباتی در روش چندربعی پیشنهاد می‌شود. معیار کار این الگوریتم براساس گرادیان پاسخ‌های مسئله است. بدین‌صورت که ابتدا مقادیر گرادیان پاسخ‌ها براساس گام معلوم در تمام نواحی میدان

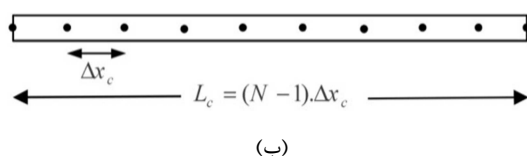
به‌طور خلاصه می‌توان گفت که برای انطباقی کردن مراکز محاسباتی در رویکرد پیشنهادی مراحل زیر انجام می‌شود:

- (۱) انتخاب یک توزیع یکنواخت با  $N$  مرکز محاسباتی،
- (۲) تعیین گرادیان بیشینه (A) پاسخ‌ها در گام زمانی معلوم،
- (۳) تقسیم‌بندی میدان به سه ناحیه برحسب ضریب  $\alpha$  و مقدار A

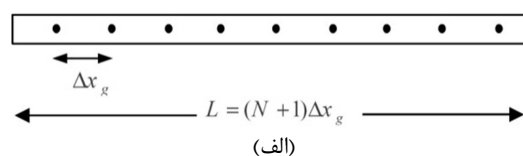




شکل ۳- روند حل مسئله ناپایا با الگوریتم انطباق



(ب)



(الف)

شکل ۴- توزیع یکنواخت (الف) مراکز محاسباتی و (ب) نقاط برهم‌نهی در روش چندربعی

## ۴-۱- معادله پخش

برای حل معادله پخش، دامنه‌ای به طول  $L=2$  با شرایط مرزی دیریکله، به صورت رابطه (۹) در نظر گرفته شده است. همچنین ضریب پخش برابر  $D=0.08$  است.

$$\begin{aligned} S_1 : u(0,t) &= 0 \\ S_2 : u(L,t) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

این مسئله دارای حل دقیق به صورت رابطه (۱۰) است که برای صحت‌سنجی پاسخ‌ها از آن استفاده می‌شود [۲۶].

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{D(4t+1)}\right] \quad (10)$$

مقادیر شرایط اولیه مسئله نیز با جایگذاری  $t=0$  در حل دقیق حاصل می‌شود.

در ابتدا مسئله با توزیع تعداد  $N=90$  مرکز محاسباتی یکنواخت حل می‌شود. در این حالت، مقادیر  $\Delta x_c$  و  $\Delta x_g$  به ترتیب برابر  $0.022472$  و  $0.021987$  به دست می‌آیند. برای تعیین متغیر شکل بهینه، همان‌طور که در بخش ۳ اشاره شد، شرایط اولیه مسئله با تابع

خطای حاصل از حل مسئله با توزیع‌های یکنواخت و انطباقی در جدول ۳، ارائه گردیده است. طبق این جدول، میزان خطای توزیع انطباقی در مقایسه با توزیع یکنواخت کمتر است.

در شکل ۵- الف، توزیع انطباقی نقاط به همراه تعداد آن‌ها، در سه گام زمانی دلخواه نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی منجر به کمتر شدن تعداد نقاط نسبت به حالت یکنواخت و تمرکز بیشتر و کمتر آن‌ها به ترتیب در نواحی با گرادین‌های بالا و پایین شده است.

چندربعی و متغیر شکل‌های مختلف درون‌یابی می‌شود. سپس متغیر شکلی که دقیق‌ترین تخمین از شرایط اولیه را داشته باشد به‌عنوان مقدار بهینه در تمامی گام‌های زمانی استفاده می‌گردد (جدول ۲). مطابق جدول ۱، ناحیه‌بندی دامنه مسئله در هر گام زمانی براساس مقادیر حداکثر گرادین در گام زمانی معلوم قبلی انجام می‌گیرد.

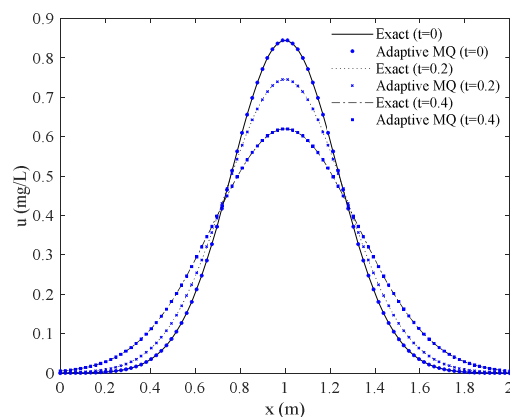
جدول ۲- مقادیر متغیر شکل بهینه در مثال ۱-۴

توزیع مراکز محاسباتی	متغیر شکل بهینه (C)
انطباقی	۰/۴
یکنواخت	۰/۰۶

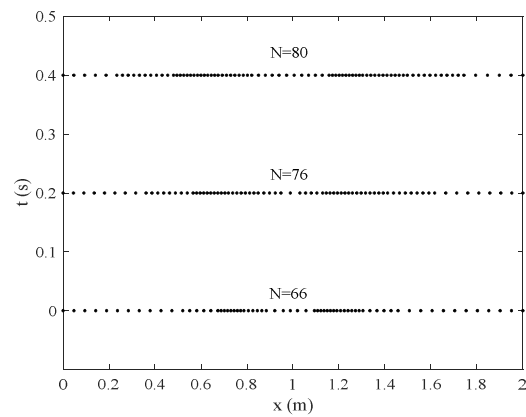
برای مثال مورد بحث، مقادیر بهینه ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  نیز به ترتیب برابر ۰/۲۵ و ۰/۵ تعیین شده است. همچنین

جدول ۳- جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی در مثال ۱-۴

RMSRE (%)		زمان (t)
توزیع یکنواخت	توزیع انطباقی	
$4.64 \times 10^{-2}$	$4.34 \times 10^{-4}$	صفر
$1/1 \times 10^{-1}$	$4/99 \times 10^{-4}$	۰/۲
$9/8 \times 10^{-1}$	$5/96 \times 10^{-4}$	۰/۴



(ب)



(الف)

شکل ۵- الف) نمودار توزیع انطباقی نقاط و (ب) پاسخ‌ها در مثال ۱-۴

در دو روش، به دلیل تغییر فواصل نقاط، برابر نیستند. همچنین ملاحظه می‌شود که با هموار شدن منحنی تعداد نقاط افزایش می‌یابد و به توزیع یکنواخت نزدیک‌تر می‌شود.

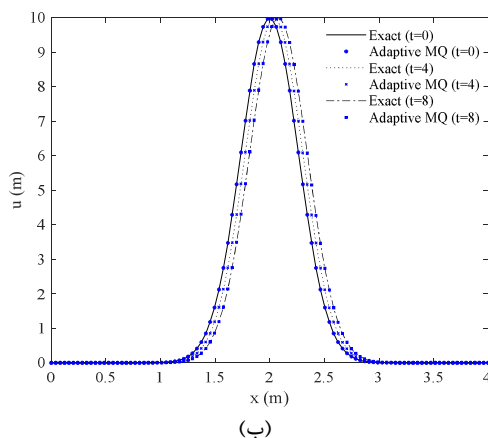
#### ۲-۴- معادله جابه‌جایی

پاسخ‌های مسئله با توزیع انطباقی در سه گام زمانی متوالی به همراه حل دقیق در شکل ۵- ب نشان داده شده است. چنان‌که ملاحظه می‌شود تعداد مراکز محاسباتی به دست آمده از روش انطباقی پیشنهادی در گام‌های زمانی متوالی، برای یک خطای معین، یکسان نیست. همچنین مقادیر ضریب شکل بهینه به دست آمده

ترتیب برابر  $0.4395$  و  $0.44943$  حاصل می‌شود. در جدول ۴، مقادیر متغیر شکل بهینه برای حل معادله جابه‌جایی در حالت توزیع‌های یکنواخت و انطباقی ارائه شده است. مقادیر بهینه ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  نیز (با آزمون و خطا) به ترتیب برابر  $0.3$  و  $0.55$  برآورد شده‌اند. در شکل ۶، به ترتیب توزیع انطباقی مراکز محاسباتی و پاسخ حل انطباقی به همراه حل دقیق مسئله نشان داده شده است. همچنین پاسخ‌های حاصل از حل توزیع‌های یکنواخت و انطباقی با حل دقیق در جدول ۵ مقایسه شده‌اند. چنانکه مشاهده می‌شود، در این مثال نیز، دقت توزیع انطباقی، با تعداد نقاط کمتر، از توزیع یکنواخت به مراتب بیشتر است. علاوه بر این، مانند مثال قبل، ضرایب شکل بهینه به‌دست آمده در دو روش برابر نیستند. همچنین ملاحظه می‌شود که چون شکل منحنی تغییر نمی‌کند و صرفاً جابه‌جا می‌شود لذا تعداد نقاط نیز تغییر نمی‌یابد.

جدول ۴- مقادیر متغیر شکل بهینه در مثال ۲-۴

توزیع مراکز محاسباتی	متغیر شکل بهینه (C)
انطباقی	۰/۱۴
یکنواخت	۰/۱۱



برای حل این معادله دامنه‌ای به طول  $L=4$ ، با شرایط مرزی دیریکله و نومان به ترتیب در مرزهای چپ و راست آن، در نظر گرفته شده است (رابطه ۱۱). همچنین سرعت جابه‌جایی  $V=0.1$  است:

$$\begin{aligned} S_1: & u(0, t) = 0 \\ S_2: & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

حل دقیق مسئله نیز به صورت رابطه زیر است [۲۲]:

$$u(x, t) = 10 \exp\left[-\frac{(x - x_0 - Vt)^2}{2\rho^2}\right] \quad (12)$$

که در آن مقدار انحراف معیار  $\rho$  برابر ۲۶۴ منظور شده و محل بیشینه مقدار آلاینده است.

در ابتدا مسئله با توزیع یکنواخت تعداد  $N=90$  نقطه حل شد. در این حالت مقادیر  $\Delta x_c$  و  $\Delta x_g$  به

شکل ۶- (الف) نمودار توزیع انطباقی نقاط و (ب) پاسخ‌ها در گام‌های زمانی متوالی در مثال ۲-۴

آن صحت‌سنجی شده‌اند. حل دقیق این معادله در دامنه یک‌بعدی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(x-1-Vt)^2}{D(4t+1)}\right] \quad (9)$$

و مقادیر شرایط مرزی مسئله عبارت‌اند از:

### ۴-۳- معادله پخش - جابه‌جایی

برای حل این معادله، دامنه‌ای به طول  $L=2$  با شرایط مرزی دیریکله در نظر گرفته شده است. این مسئله نیز دارای حل دقیق است که پاسخ‌های به‌دست آمده با

با توزیع یکنواخت حل شد و مقادیر  $\Delta x_c$  و  $\Delta x_g$  به ترتیب برابر با  $۰/۰۲۱۹۸۷$  و  $۰/۰۲۲۴۷۲$  به دست آمد. مقادیر بهینه ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  نیز به ترتیب برابر  $۰/۲۵$  و  $۰/۴$  برآورد شده است. توزیع انطباقی نقاط و پاسخ حل انطباقی به همراه حل دقیق در شکل ۷ نمایش داده شده است.

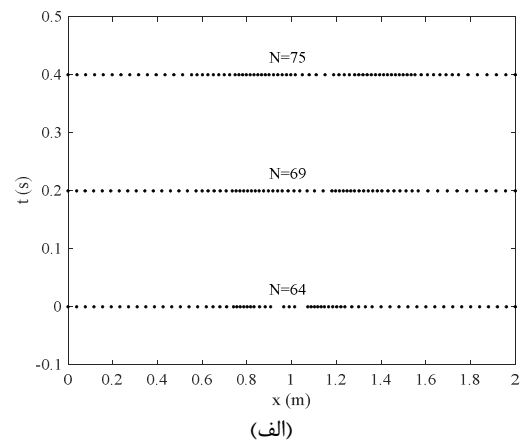
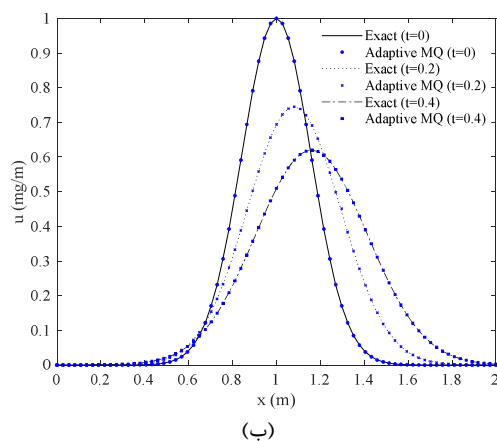
$$S_1: u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(-1-Vt)^2}{D(4t+1)}\right] \quad (۱۴)$$

$$S_2: u(L,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(L-1-Vt)^2}{D(4t+1)}\right]$$

همچنین مقادیر سرعت جابه‌جایی ( $V$ ) و ضریب پخش ( $D$ )، به ترتیب برابر  $۰/۴$  و  $۰/۰۵$  در نظر گرفته شده‌اند. در ابتدا مسئله با تعداد  $N=90$  مرکز محاسباتی

جدول ۵- جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی در مثال ۲-۴

RMSRE (%)		زمان ( $t$ )
توزیع یکنواخت	توزیع انطباقی	
$۱,۹۶ \times 10^{-2}$	$۲,۹۴ \times 10^{-5}$	صفر
$۷,۶۷ \times 10^{-2}$	$۳,۲۶ \times 10^{-4}$	۴
$۵,۱۱ \times 10^{-1}$	$۵,۹۶ \times 10^{-4}$	۸



شکل ۷- (الف) نمودار توزیع انطباقی نقاط و (ب) پاسخ‌ها در گام‌های زمانی متوالی در مثال ۳-۴

جدول ۷- جذر میانگین مربعات درصد خطای نسبی در مثال

۳-۴

RMSRE (%)		زمان ( $t$ )
حل توزیع یکنواخت	حل توزیع انطباقی	
$۴,۳۶ \times 10^{-2}$	$۴,۷۲ \times 10^{-4}$	۰
$۹,۱۷ \times 10^{-2}$	$۷,۹۱ \times 10^{-4}$	۰/۲
$۱,۰۸ \times 10^{-1}$	$۸,۶۵ \times 10^{-4}$	۰/۴

همچنین مانند مثال ۱ با هموار شدن منحنی، تعداد نقاط افزایش می‌یابد و به توزیع یکنواخت نزدیکتر می‌شود. به طور خلاصه می‌توان گفت که در این روش تقسیم‌بندی نواحی مختلف دامنه با توجه به مقدار بیشینه

همچنین مقادیر متغیرهای شکل بهینه و خطاهای حاصل از روش‌های توزیع‌های انطباقی و یکنواخت به ترتیب در جدول ۶ و ۷ برآورده شده‌اند. نتایج این مثال نیز موید نتایج مثال‌های قبلی است. از جدول ۷ ملاحظه می‌شود که به ازای دقت معین تعداد نقاط در توزیع انطباقی از توزیع یکنواخت به میزان قابل توجهی کمتر است.

جدول ۶- مقادیر متغیر شکل بهینه در مثال ۳-۴

توزیع مراکز محاسباتی	متغیر شکل بهینه (C)
انطباقی	۰/۰۴۵
یکنواخت	۰/۰۲

توزیع انطباقی نیز در مقایسه با خطاهای حاصل از توزیع یکنواخت به مقدار قابل توجهی کاهش یافته است [۲۷].

### ۵- نتیجه گیری

معمولاً در حل عددی مسائل با تغییرات فیزیکی موضعی زیاد به شبکه یا توزیع مراکز یکنواخت فشرده تری برای کاهش خطاها نیاز است که افزایش حجم محاسبات را با خود به دنبال دارد. برای اجتناب از این امر، در این مقاله، یک الگوریتم جدید برای توزیع انطباقی مراکز محاسباتی در روش بدون شبکه چنددریعی برای حل بهینه معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی ناپایا در حالت یک بعدی پیشنهاد شد. در این روش برای اولین بار، معیار اصلی این الگوریتم گرادیان یا میزان تغییرات پاسخ‌های مسئله در گام معلوم انتخاب گردید. در این روند ابتدا نواحی مختلف دامنه با گرادیان زیاد، متوسط و کم شناسایی می‌شوند. سپس در مناطق با گرادیان زیاد، تعداد مراکز محاسباتی افزایش می‌یابد و بالعکس. برای تعیین متغیر شکل بهینه نیز یک الگوریتم کارا پیشنهاد شد که برای مسائل زمانی بسیار مناسب و کاربردی بوده و منجر به کاهش قابل توجه هزینه‌های محاسباتی می‌شود. نهایتاً نتایج مثال‌های عددی نشان داد که به کارگیری الگوریتم حاضر باعث افزایش دقت حل مسئله و کاهش تعداد مراکز محاسباتی در مقایسه با توزیع یکنواخت نقاط می‌شود که حاکی از کارآمدی توزیع انطباقی گرادینی پیشنهادی است.

گرادیان و یافتن ضرایب بهینه آن ( $\alpha$ ) صورت می‌گیرد. به این منظور، با فرض یک توزیع یکنواخت اولیه، افزایش و کاهش تعداد مراکز محاسباتی در نواحی تقسیم شده براساس ضریب  $\beta$  انجام می‌گردد. به این منظور در نواحی با گرادیان شدید که به تمرکز بیشتر نقاط نیاز دارند، تعداد مراکز نسبت به حالت یکنواخت با ضریب  $(2-\beta)$  بیشتر شده و در مقابل در نواحی با گرادیان‌های کمتر، تعداد نقاط با ضریب  $\beta$  کاهش می‌یابد. مقادیر بهینه این ضرائب با آزمون و خطا بدست می‌آیند. علاوه بر این، برای یافتن مقدار بهینه ضریب شکل، شرایط اولیه مسئله با تابع چنددریعی درون‌یابی می‌شود و متغیر شکلی که دقیق‌ترین تخمین از آن را داشته باشد، به عنوان متغیر شکل بهینه برای همه گام‌های زمانی انتخاب می‌گردد.

به منظور صحت‌سنجی رویکرد پیشنهادی، مثال‌هایی از معادلات پخش، جابه‌جایی و پخش-جابه‌جایی که دارای کاربرد فراوان در علوم مهندسی آب و هیدرلیک هستند، و به علاوه دارای تغییرات گرادیان کافی در بازه مورد نظر به منظور نمایش کارایی روش پیشنهادی می‌باشند، ارائه شد. نتایج حاکی از کارآمدی چشمگیر روش پیشنهادی در مثال‌های حل شده است. به عنوان مثال در مسئله جابه‌جایی تعداد نقاط در توزیع انطباقی در زمان صفر،  $0/2$  و  $0/4$  ثانیه، به ترتیب برابر  $60$ ،  $59$  و  $58$  حاصل شده ولی تعداد مراکز توزیع یکنواخت  $90$  است. همچنین مقدار خطای پاسخ‌های

### References

- [1] Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics- A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with applications*, 19(8-9), 127-145. doi: 10.1016/0898-1221(90)90270-T
- [2] Kindelan, M., Bernal, F., González-Rodríguez, P., & Moscoso, M. (2010). Application of the RBF meshless method to the solution of the radiative transport equation. *Journal of Computational Physics*, 229(5), 1897-1908. doi: 10.1016/j.jcp.2009.11.014
- [3] Kansa, E. J., & Geiser, J. (2013). Numerical solution to time-dependent 4D inviscid Burgers' equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(3), 637-645. doi: 10.1016/j.enganabound.2013.01.003
- [4] Patel, S., & Rastogi, A. K. (2017). Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system. *Water Resources Management*, 31(9), 2869-2884. doi: 10.1007/s11269-017-1668-8
- [5] Babaei, R., Jabbari, E., & Eskandari-Ghadi, M. (2019). Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 52(12), 3015-3030. doi: 10.22060/ceej.2019.16443.6230 [In Persian]
- [6] Koushki, M., Jabbari, E., & Ahmadiania, M. (2020). Evaluating RBF methods for solving PDEs using Padua points distribution. *Alexandria Engineering Journal*, 59(5), 2999-3018. doi: 10.1016/j.aej.2020.04.047

- [7] Mirabi, M. H., Jabbari, E., & Rajaei, T. (2022). Numerical Solution of Steady Incompressible Turbulent Navier–Stokes Equations using Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF) Method. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 53(12), 5325-5356. doi: 10.22060/ceej.2021.18788.6964 [In Persian]
- [8] Fornberg, B., & Wright, G. (2004). Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter. *Computers & Mathematics with Applications*, 48(5-6), 853-867. doi: 10.1016/j.camwa.2003.08.010
- [9] Xiang, S., Wang, K. M., Ai, Y. T., Sha, Y. D., & Shi, H. (2012). Trigonometric variable shape parameter and exponent strategy for generalized multiquadric radial basis function approximation. *Applied Mathematical Modelling*, 36(5), 1931-1938. doi: 10.1016/j.apm.2011.07.076
- [10] Esmaeilbeigi, M., & Hosseini, M. M. (2014). A new approach based on the genetic algorithm for finding a good shape parameter in solving partial differential equations by Kansa's method. *Applied Mathematics and Computation*, 249, 419-428. doi: 10.1016/j.amc.2014.10.012
- [11] Biazar, J., & Hosami, M. (2016). Selection of an interval for variable shape parameter in approximation by radial basis functions. *Advances in Numerical Analysis*, 2016. doi: 10.1155/2016/1397849
- [12] Azarboni, H. R., Keyanpour, M., & Yaghouti, M. (2019). Leave-Two-Out Cross Validation to optimal shape parameter in radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 100, 204-210. doi: 10.1016/j.enganabound.2018.06.011
- [13] Fallah, A., Jabbari, E., & Babaei, R. (2019). Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, *Computers & Mathematics with Applications*, 77(3), 815-829. doi: 10.1016/j.camwa.2018.10.021
- [14] Koushki, M., Babaei, R. & Jabbari, E. (2020). Application of RBF Multiquadric method for solving seepage problems using a new algorithm for Optimization of the shape parameter. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 52(4), 1009-1024. doi: 10.22060/ceej.2019.15155.5840 [In Persian]
- [15] Berger, M. J., & Jameson, A. (1985). Automatic adaptive grid refinement for the Euler equations. *AIAA journal*, 23(4), 561-568. doi: 10.2514/3.8951
- [16] Sarra, S. A. (2005). Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 54(1), 79-94. doi: 10.1016/j.apnum.2004.07.004
- [17] Libre, N. A., Emdadi, A., Kansa, E. J., Shekarchi, M., & Rahimian, M. (2009). A multiresolution prewavelet-based adaptive refinement scheme for RBF approximations of nearly singular problems. *Engineering analysis with boundary elements*, 33(7), 901-914. doi: 10.1016/j.enganabound.2009.02.007
- [18] Biazar, J., & Hosami, M. (2015). An adaptive meshless method of line based on radial basis functions. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 5(2), 45-58. doi: 10.22067/ijnao.v5i2.35815
- [19] Kaennakham, S., & Chuathong, N. (2019). An automatic node-adaptive scheme applied with a RBF-collocation meshless method. *Applied Mathematics and Computation*, 348, 102-125. doi: 10.1016/j.amc.2018.11.066
- [20] Cavoretto, R., & De Rossi, A. (2020). An adaptive LOOCV-based refinement scheme for RBF collocation methods over irregular domains. *Applied Mathematics Letters*, 103, 106178. doi: 10.1016/j.aml.2019.106178
- [21] Cavoretto, R., & De Rossi, A. (2020). A two-stage adaptive scheme based on RBF collocation for solving elliptic PDEs. *Computers & Mathematics with Applications*, 79(11), 3206-3222. doi: 10.1016/j.camwa.2020.01.018
- [22] Kolbe, N., & Sfakianakis, N. (2022). An adaptive rectangular mesh administration and refinement technique with application in cancer invasion models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 416, 114442. doi: 10.1016/j.cam.2022.114442
- [23] Cavoretto, R., De Rossi, A., Sommariva, A., & Vianello, M. (2022). RBFCUB: A numerical package for near-optimal meshless cubature on general polygons. *Applied Mathematics Letters*, 125, 107704. doi: 10.1016/j.aml.2021.107704
- [24] Wei, C., Hu, Q., Li, S., & Shi, X. (2023). Hydrodynamic interactions and wake dynamics of fish schooling in rectangle and diamond formations. *Ocean Engineering*, 267, 113258. doi: 10.1016/j.oceaneng.2022.113258
- [25] Loubère, R., Turpault, R., & Bourriaud, A. (2023). A MOOD-like compact high order finite volume scheme with adaptive mesh refinement. *Applied Mathematics and Computation*, 443, 127792. doi: 10.1016/j.amc.2022.127792
- [26] Sankaranarayanan, S., Shankar, N. J., & Cheong, H. F. (1998). Three-dimensional finite difference model for transport of conservative pollutants. *Ocean Engineering*, 25(6), 425-442. doi: 10.1016/S0029-8018(97)00008-5
- [27] Mohammadalian, S. (2022). Evaluation of the performance of adaptive point distribution algorithms in Multiquadric radial basis functions meshfree methods in solving 1-D and 2-D problems. *MSc. Thesis, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.* [In Persian]