

**B. Gilak**

Civil Engineering Department,  
University of Qom, Qom, Iran

**e-mail:** gilak.boshra@yahoo.com

**M. Sharifi\***

Civil Engineering Department,  
University of Qom, Qom, Iran

**e-mail:** m.sharifi@qom.ac.ir

**A. Mobinipour**

Civil Engineering Department,  
University of Qom, Qom, Iran

**e-mail:** mobinipour@qom.ac.ir

## **New Method for Simulation the Flexural Behavior of Fiber Reinforced Concretes With Combining the Finite Element and Section Moment Curvature**

*Fiber reinforced concrete in tension is categorized based on tension softening behavior. Wide researchers have been studied this behavior and presented many tension softening models. With regard to the difficulties in direct tension test, tension softening diagram will be obtained a base on reverse analysis of flexural or split wedge test. The result of the inverse analysis method is mainly affected by applied assumptions. In this research, a new method which combines the finite element and section moment-curvature relations is presented. This method is called FE-SMC. In this study, the three-point bending test has been simulated by this method. In each step of loading, the nonlinearity of cracked section properties have been calculated with moment-curvature relationships and the parameters have been updated in FE. The arc length method has been used for iterations solution. Finally, this method is validated with some experimental test results. The results show that FE-SMC method show desirable result for low-fiber content with descending tension softening diagram. Also using this method in some experimental results with constant tension softening or hardening behavior, do not meet required fitting criteria and show deficiency in applied assumption and need to modifications.*

**Keywords:** Fiber Reinforced Concrete, Tension Softening, Three-point/Four-point bending Test, Finite Element Method, sectional moment-curvature analyze

---

\* Corresponding author

Received 28 June 2019, Revised 18 December 2019, Accepted 18 December 2019.

DOI: 10.22091/cer.2019.3907.1137

## شبیه‌سازی رفتار خمشی بتن‌های الیافی با استفاده از اجزای محدود - لنگر انحنای مقطع

بتن مسلح الیافی، عمدتاً به واسطه رفتار خود در ناحیه کششی ترک خورده، که به آن رفتار نرم‌شوندگی کششی گفته می‌شود، متمایز می‌گردد. محققان مطالعات بسیاری بر روی این رفتار صورت داده و مدل‌های نرم‌شوندگی بسیاری ارائه کرده‌اند. با توجه به پیچیدگی‌های انجام آزمایش مستقیم، مبنای ارائه نرم‌شوندگی، در بسیاری از تحقیقات تحلیل معکوس یک مقطع خمشی است. عمدتاً این تحلیل با فرضیات ساده‌کننده انجام شده است. در این تحقیق، یک روش جدید ترکیبی از اجزای محدود و لنگر-انحنا ارائه شده است. در این مطالعه، رفتار مقطع تیر مستطیلی تحت آزمایش خمش سه نقطه‌ای با استفاده از روش اجزای محدود و به‌کارگیری روش طول کمان استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش، اثرات غیرخطی در المان بحرانی، در هر مرحله با روابط لنگر-انحنا به روز شده و در تحلیل اجزای محدود اعمال می‌گردد. همچنین، این مطالعه، مقایسه‌ای بین چهار مدل نرم‌شوندگی کششی شامل مدل‌های ثابت، خطی، نمایی و دوخطی در رفتار خمشی مقطع مستطیلی را ارائه می‌دهد. این روش با برخی از نتایج آزمایشگاهی اعتبارسنجی شده است. نتایج نشان دهنده این است که این مدل‌ها برای بتن‌های با نرم‌شدگی تنش‌کاهشی و کم الیاف نتیجه خوبی در بر دارد. همچنین با توجه به نتایج، توصیه می‌شود برای ارزیابی رفتار نمونه‌های الیافی که نرم‌شدگی در آنها قابل ملاحظه نمی‌باشد، در توسعه روابط لنگر-انحنا از توزیع ترک بازشدگی با منحنی‌های درجه ۲ یا شبیه آن استفاده شود.

**واژگان کلیدی:** بتن مسلح الیافی، نرم‌شوندگی کششی، آزمایش سه نقطه/چهار نقطه خمشی، روش اجزای محدود، تحلیل لنگر-انحنای مقطع.

### بشری گیلک

دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم.

پست الکترونیک:

gilak.boshra@yahoo.com

### مهدی شریفی\*

دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم.

پست الکترونیک:

m.sharifi@qom.ac.ir

### احمد مبینی‌پور

دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم.

پست الکترونیک:

mobinipour@qom.ac.ir

### ۱- مقدمه

سازه با آرماتور و یا الیاف می‌باشد. مسلح کردن بتن با الیاف کوتاه و پراکنده جهت بالا بردن طاقت در کارهای اجرایی نظیر پوشش تونل‌ها و کف‌های صنعتی و کارهای مشابه به‌خوبی تجربه شده است [۱-۳]. در حال حاضر سوال مهم در این زمینه، نحوه ارزیابی طاقت بتن‌های الیافی و بیان آن به وسیله یک پارامتر مشخص و مورد استفاده در طراحی است [۴]. در این زمینه، تعداد زیادی آزمایش برای ارزیابی طاقت در بتن‌های الیافی پیشنهاد شده است. انجام آزمایش کشش مستقیم به دلیل حساسیت تجهیزات بارگذاری عمدتاً امکان‌پذیر نمی‌باشد و بنابراین از روش‌های غیرمستقیم دیگر نظیر آزمایش خمشی یا آزمایش دو نیم‌شدن استفاده

بتن به‌عنوان یک ماده ترد شناخته شده است که رفتار مکانیکی سازه‌های بتنی متأثر از ترک و نحوه گسترش آن می‌باشد. به دلیل پایین بودن تراز طاقت مواد سیمانی، ترک‌های کششی در نرخ‌های پایین تنش کششی ایجاد می‌شود. یکی از راه‌های مقابله با این رفتار، مسلح کردن

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۰۷، بازنگری: ۱۳۹۸/۰۹/۲۷، پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۲۷  
DOI: 10.22091/cer.2019.3907.1137 شناسه دیجیتال

می‌شود. اما مسئله اساسی دیگر، پراکندگی در نتایج آنها و عدم استفاده از آنها در طراحی می‌باشد [۵]. در نتیجه در این راستا محققان درصدد ارزیابی طاق یا به عبارت دیگر، ارزیابی رفتارهای آزمایشی نظیر آزمایش خمشی بتن‌های الیافی به وسیله مدل‌های ریاضی می‌باشند. بنابراین، تلاش‌های زیادی جهت مدل‌سازی رفتار بتن‌های الیافی مسلح شده با الیاف فولادی انجام شده است. ضعف اغلب این مدل‌ها عدم توصیف رخداد واقعی در مقطع ترک‌خورده است. به همین جهت، به دلیل عدم اطمینان و شناخت کافی از مسائل طراحی، استفاده و کاربرد سازه‌های بتن‌های الیافی، هنوز استاندارد نشده است [۶].

اساس روش‌های موجود که برای ارزیابی رفتار خمشی بتن الیافی مسلح شده با الیاف استفاده می‌شود، بر مبنای تعادل تلاش‌های داخلی در مقطع ترک‌خورده تحت اثر خمش قرار دارد. چالش اساسی در این روش‌ها، ارزیابی مقاومت بتن در ناحیه ترک‌خورده در این محدوده است که در واقع ارزیابی اثر پل‌بندی الیاف<sup>۱</sup> در این ناحیه می‌باشد. در ادبیات فنی، به رابطه مقاومت بتن در ناحیه ترک‌خورده، رابطه تنش-بازشدگی<sup>۲</sup> گفته می‌شود. در حقیقت، این رابطه باید از آزمایش مستقیم کشش نمونه بتن الیافی به دست آید، اما هنوز یک روش استاندارد مقبول برای انجام آزمایش کشش مستقیم بتن الیافی حاصل نشده است [۷]. در نتیجه در اغلب تحقیقات این رابطه از روش‌های غیرمستقیم و با استفاده از روابط پیوسته موجود پیشنهاد شده استفاده می‌شود [۶، ۸ و ۹]. استفاده از این روابط پیشنهادی، نیازمند به‌کارگیری روش‌های سعی و خطا (تکرار) در حل مسئله می‌باشد که البته در تحقیقی جدید پژوهشگران، یک روش بسته<sup>۳</sup> برای پیش‌بینی رفتار خمشی بتن الیافی ارائه داده‌اند [۱۰-۱۳]. همچنین باروس<sup>۴</sup> و همکاران، یک مدل

برای شبیه‌سازی رابطه لنگر- دوران و عرض ترک اعضای بتن مسلح الیافی با آرماتورهای طولی ارائه داده‌اند [۱۴]. امین و فاستر<sup>۵</sup>، روشی برای تحلیل مقطع ارائه نمودند که رفتار خمشی مقاطع بتن مسلح فولادی را پیش‌بینی می‌کرد [۱۵]. محققان، یک تحلیل مقطعی مبتنی بر میکرومکانیک برای پیش‌بینی رفتار خمشی تیرهای بتن مسلح الیافی با کارآیی بسیار بالا (UHPFRC<sup>۶</sup>) از جمله الیاف فولادی مستقیم با طول‌های گوناگون ارائه دادند [۱۶]. ردی<sup>۷</sup> و همکاران، یک فرمولاسیون تحلیلی برای رفتار خمشی بتن با در نظر گرفتن رابطه چندخطی تنش-بازشدگی با استفاده از مدل مفصل ترک‌خورده برای بتن مسلح الیافی ماکروسینتتیک توسعه دادند. آنها همچنین، روشی معکوس برای به‌دست آوردن رابطه چند خطی تنش در پاسخ بار خمشی یک تیر ارائه دادند [۱۷]. پژوهشگران، اثرات پاسخ کشش مستقیم را بر روی مقاومت خمشی بتن مسلح الیافی با کارآیی بالا (UHPFRC) با استفاده از تحلیل مقطعی بررسی کردند. همبستگی بین کشش مستقیم و پاسخ خمشی بتن مسلح الیافی با جزئیات برای توسعه کد طراحی اعضای خمشی بتن مسلح الیافی با کارآیی بالا مورد بررسی قرار گرفت [۱۸].

محققان، یک راه‌حل ترکیبی از الیاف و میلگردهای تقویتی زمانی که بتن مسلح الیافی به‌عنوان تنها سیستم تقویت‌کننده مناسب نیست، پیشنهاد کردند. در این روش مدل‌های ماده، مشتقات و برای اولین بار، راه‌حل‌های فرم بسته برای ایجاد دیاگرام اندرکنش بار- لنگر قطعات بتن مسلح هیبریدی ارائه شده است [۱۹]. در تحقیقی دیگر، یک مدل شامل تنش- کرنش کششی سه خطی با مقاومت پسماند که در تعیین مشخصات و پیش‌بینی رفتار خمشی چند ماده کامپوزیتی سیمانی در طولانی‌مدت به کار می‌رود، ارائه شد. در این پژوهش، از نتایج آزمایش خمشی برای

<sup>1</sup>- Bridging

<sup>2</sup>- Stress-Crack Opening Relation

<sup>3</sup>- Close Form Solution

<sup>4</sup>- Barros

<sup>5</sup>- Amin and Foster

<sup>6</sup>- Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concrete

<sup>7</sup>- Reddy

روش اجزای محدود و به‌کارگیری روش طول کمان استوانه‌ای شبیه‌سازی شده است. رفتار غیرخطی بتن ترک‌خورده در محل بحرانی، در هر مرحله با روابط لنگر-انحنا محاسبه، به روز و در تحلیل اجزای محدود اعمال شده است. در انتها نیز مقایسه‌ای بین چهار مدل نرم‌شوندگی کششی شامل مدل‌های ثابت، خطی، نمایی و دوخطی در رفتار خمشی مقطع مستطیلی ارائه گردیده است. این روش با برخی از نتایج آزمایشگاهی اعتبارسنجی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهنده این است که این مدل‌ها برای بتن‌های با نرم‌شدگی تنش‌کاهشی و کم‌الیاف، نتیجه خوبی در بر دارد.

## ۲- فرضیات اساسی در مدل پیشنهادی

### ۲-۱- کلیات

همانگونه که در مقدمه عنوان شد، در این تحقیق، رفتار خمشی تیر به‌وسیله روش اجزای محدود شبیه‌سازی می‌شود. همواره در آزمایشات خمشی سه/چهار نقطه‌ای، مقطع بحرانی در وسط مقطع واقع شده است [۲۷]. بنابراین در مدل‌سازی اجزای محدود نیاز است رفتار غیرخطی این مقطع در محاسبات وارد گردد. یک روش ساده جهت اعمال رفتار غیرخطی بتن ترک‌خورده در محل بحرانی، استفاده از روش تحلیل لنگر انحنای مقطع است. به‌صورت ساده می‌توان در هر مقطع با دانستن میزان لنگر، کرنش فشاری تار فشاری و با اعمال روابط لنگر-انحنا و توسعه آن برای مقاطع ترک‌خورده، ویژگی‌های غیرخطی در المان بحرانی را محاسبه و در محاسبات اجزای محدود وارد ساخت. در روش پیشنهادی، جهت اعمال اثرات ترک‌خوردگی در تحلیل غیرخطی تیر، در هر گام، ابتدا میزان تغییرشکل تار فوقانی تیر محاسبه می‌شود و برای المان بحرانی (المان میانی) متناسب با لنگر ایجاد شده و تغییر طول تار فوقانی تیر، با استفاده از روابط لنگر-انحنا که در آن اثرات ترک‌خوردگی مقطع وارد می‌شود، سختی و مقاومت المان بحرانی محاسبه

به‌دست آوردن پارامترهای مواد و تعیین ارتباط آنها با افزایش زمان استفاده گردید [۲۰].

در برخی از روش‌ها به‌جای اعمال رابطه تنش-بازشدگی، سعی می‌کنند نیروهای پل‌بندی ناشی از الیاف در وجه ترک را بر مبنای نتایج به‌دست آمده از آزمایش بیرون‌کشیدگی یک الیاف<sup>۸</sup> مشخص نمایند [۲۱-۲۳]. مسئله مهم در این روش‌ها نامشخص بودن (احتمالاتی بودن) تعداد الیاف در محل ترک، موقعیت الیاف در مقطع ترک‌خورده، ارتباط این نیروها با عرض ترک، نحوه جهت‌گیری الیاف<sup>۹</sup> و طول مدفون الیاف می‌باشد که همه این مسائل از توزیع تصادفی الیاف ناشی می‌شود.

آرملین و بانتیا<sup>۱۰</sup>، روشی ساده برای ارزیابی رفتار خمشی بتن مسلح الیافی پیشنهاد کردند. در این روش با روابطی بسیار ساده، تغییر مکان در وسط تیر در حالت مکانیزم شده، با مقدار عرض ترک و عمق ترک در محل ترک ارتباط داده می‌شود [۲۱]. این روش، توسط شریفی و کمالی برای محدوده‌ای از آزمایشات اعمال شد و نتایج نشان داد که قابل تعمیم برای حالت‌های مختلف مصالح نیمه‌ترد نمی‌باشد. به‌نظر می‌رسد به‌کار بردن روابط ساده جهت ارتباط خیز و ترک، دارای قابلیت اعتماد کمی است [۲۴]. یکی از روش‌های مورد استفاده برای تحلیل تیرها در خمش، استفاده از مدل‌های اجزای محدود به‌ویژه مدل‌های رشته‌ای (Fiber) می‌باشد. در این روش، عموماً از منحنی‌های کاهشی تنش-کرنش بجای منحنی تنش-بازشدگی در ناحیه ترک‌خورده استفاده می‌شود [۲۵].

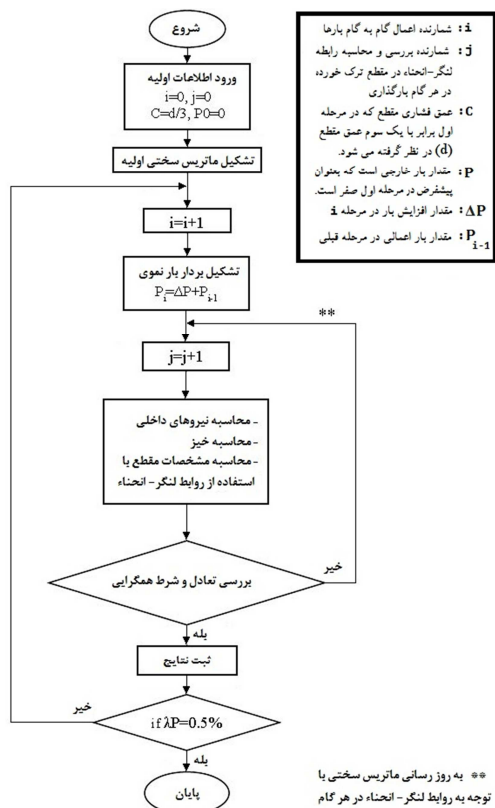
در این تحقیق، سعی در ارائه یک روش مشخص با دقت مناسب جهت پیش‌بینی رفتار بتن‌های مسلح شده با الیاف می‌باشد. ایده اصلی این روش از مقاله کوک<sup>۱۱</sup> اخذ شده است [۲۶]. در این روش با استفاده از اجزای محدود یک‌بعدی، رفتار خمشی آزمایشات سه نقطه‌ای با استفاده از

<sup>8</sup> - Single Fiber Pullout Test

<sup>9</sup> - Orientation

<sup>10</sup> - Armelin and Banthia

<sup>11</sup> - Kwak



شکل ۱- فلوجارت الگوریتم حل

جهت اعمال بار در مراحل مختلف و حل مسئله در روش سعی و خطا از روش کمان استوانه‌ای<sup>۱۲</sup> استفاده شده است. این روش توسط کریسفیلد<sup>۱۳</sup> ارائه شده است [۲۸]. اصولاً به‌دست آوردن منحنی‌های رفتاری بتن، که دارای شاخه نزولی است، فقط در شرایطی امکان‌پذیر است که از روش‌های عددی کنترل تغییرمکان مانند روش طول کمان استفاده شود. در گام‌های مختلف بارگذاری، سختی خمشی المان بحرانی با استفاده از روابط لنگر-انحناء محاسبه شده و در هر گام به‌روز می‌شود. تار خنثی از طریق محاسبه نیروهای کششی و فشاری براساس حالت‌های مختلف مقطع (فشاری، کششی ترک‌خورده و کششی ترک‌خورده) از طریق سعی و خطا محاسبه می‌شود.

### ۳-۲- توسعه روابط تحلیل لنگر-انحنای مقطع

می‌گردد. مراحل کلی کار، مشابه شکل ۱، به شرح زیر می‌باشد:

- ۱- وارد نمودن اطلاعات اولیه مسئله شامل هندسه، تعداد المان‌های تیر، مشخصات مکانیکی
- ۲- ثبت پیش‌فرض‌های تحلیل در گام صفر
- ۳- شروع گام‌های تحلیل
  - ۱-۳- اعمال بار
  - ۲-۳- تحلیل سازه براساس اطلاعات مرحله قبل
  - ۳-۳- محاسبه مقادیر خیز، کرنش طولی تیر و لنگر المان بحرانی
  - ۴-۳- محاسبه روابط لنگر-انحناء در مقطع ترک‌خورده و انجام سعی و خطا و به‌روزرسانی نتایج

۵-۳- بررسی شرایط همگرایی تا حصول همگرایی. همگرایی در این بخش زمانی حاصل می‌شود که تعادل نیروهای داخلی ایجاد شده در المان در مقطع بحرانی برقرار گردیده و با مقدار لنگر ایجاد شده به‌دست آمده در گام قبلی تحلیل تطبیق داشته باشد.

۶-۳- ثبت داده‌ها در مرحله همگرا شده در مرحله

۵-۳- مراجعه به گام ۱-۳

۴- ثبت داده‌ها و ترسیم نمودار

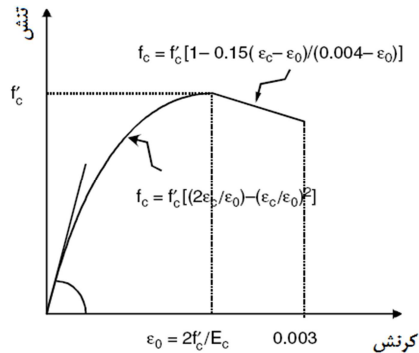
### ۲-۲- مدل‌سازی اجزای محدود

برای تحلیل تیرهای بتن الیافی از اجزای محدود یک‌بعدی استفاده شده است و المان استفاده شده از نوع تیر می‌باشد. قدم‌های مختلف برای حل نهایی مسئله به روش اجزای محدود، شامل دریافت ورودی‌ها، به‌دست آوردن ماتریس سختی المان‌ها و اسمبل کردن آن‌ها برای به‌دست آوردن ماتریس سختی کل، اعمال شرایط مرزی، حل دستگاه ماتریسی برای به‌دست آوردن جابه‌جایی گره‌ها و محاسبه نیروها و تنش‌های ایجاد شده در المان‌های مختلف است که در برنامه توسعه داده شده در نظر گرفته شده است.

<sup>12</sup>- Cylindrical Arc Length Method

<sup>13</sup>- Crisfield

در این مدل از رابطه تنش- کرنش فشاری هاگنستاد استفاده شده است [۲۲]. این روابط یکی از مدل‌های مرسوم قابل استفاده جهت روابط مشخصه بتن در فشار می‌باشد. شکل ۳، منحنی کلی تنش- کرنش فشاری بتن نشان داده شده است.



شکل ۳- رابطه تنش- کرنش بتن در فشار [۲۹]

براساس این مدل، روابط تنش- کرنش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_c = [f'_c \left( \frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2] \quad (1)$$

$$f_c = [1 - \left( \frac{0.15 \times \varepsilon_c - \varepsilon_0}{0.004 - \varepsilon_0} \right)] \quad (2)$$

که در آن  $f'_c$  مقاومت فشاری بتن،  $\varepsilon_c$  کرنش نهایی نظیر شکست فشاری بتن و  $\varepsilon_0$  کرنش نظیر تنش حداکثر  $f'_c$  می‌باشد. رفتار بتن در محدوده کششی ترک‌خورده به صورت ارتجاعی خطی با مدول ارتجاعی  $E$  فرض شده است.

### ۲-۳-۲- رابطه تنش- بازشدگی

روابط مرسوم می‌که رابطه تنش- بازشدگی بتن را نشان می‌دهند، بسیار متنوع می‌باشند. به عنوان مثال، برای بتن‌های الیافی، مدل‌های خطی [۳۰-۳۲]، نمایی [۳۳-۳۸]، دوخطی [۳۹-۴۱]، سه خطی [۴۲] و مدل با شکل آزاد تاکنون پیش‌بینی شده است. در اغلب این مدل‌ها علاوه بر مقاومت کششی بتن ( $f_t$ ) به دو پارامتر دیگر نیاز می‌باشد. در این تحقیق، مدل‌های ثابت [۲۷]، خطی [۴۳]، دوخطی [۴] و نمایی [۴۴] مطابق با جدول ۱ استفاده شده است.

در شکل ۲، شمای کلی از توزیع تنش- کرنش در یک مقطع بحرانی ترک‌خورده بتن الیافی تحت اثر خمش نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل دیده می‌شود تنش‌ها و نیروهای متناظر آن در این مقطع به سه ناحیه اصلی بخش می‌شود. این سه ناحیه عبارتند از: ناحیه فشاری، ناحیه کششی ترک‌خورده و ناحیه کششی ترک‌خورده. در بتن الیافی در ناحیه ترک‌خورده، الیاف بین دو وجه ترک، ایجاد پل‌بندی کرده و در حال بیرون آمدن از ماتریس می‌باشند و به همراه قفل و بست سنگدانه‌ها<sup>۱۴</sup> تنش‌های کششی را در قسمت ترک‌خورده ایجاد می‌نمایند. در این حالت، ظرفیت خمشی مقطع بحرانی تابع پارامترهای اصلی زیر می‌باشد:

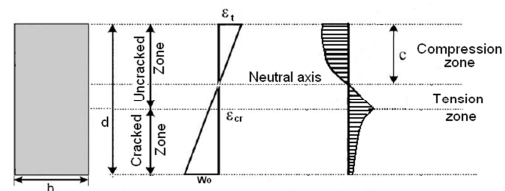
۱- رابطه تنش- کرنش فشاری بتن

۲- رابطه تنش- کرنش کششی بتن

۳- رابطه تنش- بازشدگی بتن

۴- توزیع کرنش و موقعیت تار خمشی در مقطع ترک خورده و نخورده

۵- عرض ترک و رابطه آن با خیز (تغییر شکل) میانی تیر



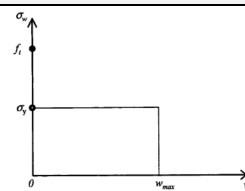
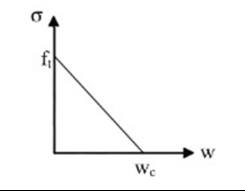
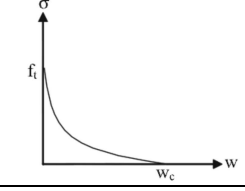
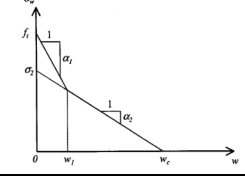
شکل ۲- شمای کلی از توزیع تنش- کرنش در یک مقطع بتنی ترک‌خورده [۲۹]

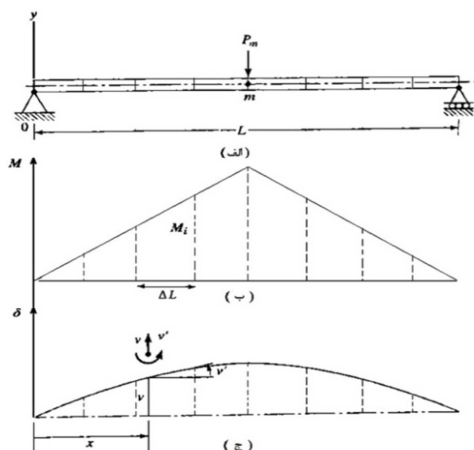
به منظور تعیین شکل تنش و مقدار آن در یک مقطع با یک خیز خاص، نیازمند تعیین پارامترهای فوق‌الذکر می‌باشیم. سپس با مشخص نمودن پارامترهای فوق و استفاده از قانون تعادل، می‌توانیم ظرفیت لنگر در مقطع را محاسبه نماییم.

### ۲-۳-۱- رابطه تنش- کرنش بتن در فشار و کشش

<sup>14</sup>- Aggregate Interlock

جدول ۱- رابطه تنش- بازشدگی استفاده شده [۲۴]

شکل	رابطه	نوع مدل
	$\sigma = f_t$	مدل ثابت
	$\sigma = f_t \left(1 - \frac{w}{w_c}\right)$	مدل خطی
	$\sigma = f_t \left[1 - \left(\frac{w}{w_c}\right)^{0.248}\right]$	مدل نمایی
	$\sigma = \begin{cases} f_t - \frac{(f_t - \sigma_1)w}{w_c} \rightarrow w \leq w_1 \\ \sigma_1 - \frac{\sigma_1(w - w_1)}{w_c - w_1} \rightarrow w > w_1 \end{cases}$	مدل دوخطی



شکل ۴- مدل اجزای محدود تیر، (الف) بارگذاری، (ب) نمودار لنگر و (ج) نمودار خیز تیر

در این مدل‌سازی، برای المان بحرانی (المان وسطی) مقادیر  $I$  و  $Y_c$  با بستی متناسب با لنگر ایجاد شده در مقطع بعد از ترک خوردگی، با استفاده از سعی و خطا محاسبه شده و در گام‌های تحلیل به‌روز شود. با توجه به شکل ۵، بین میزان کاهش تار فوقانی ( $\Delta$ ) و زاویه دوران مقطع ترک‌خورده ( $\theta$ )

۲-۳-۳- رابطه لنگر- انحناء و ارتباط عرض ترک با خیز تیر یکی از نیازها جهت پیش‌بینی رفتار خمشی، ارتباط بین عرض ترک ( $w_0$ ) با تغییرشکل میانی تیر ( $\delta$ ) تحت اثر خمش می‌باشد. در این تحقیق، مقدار تغییرشکل میانی تیر و همچنین کرنش فشاری و تغییر طول تار فوقانی به‌صورت مستقیم از نتایج اجزای محدود مطابق با شکل ۴، براساس رابطه (۳) قابل استخراج است.

$$\Delta_i = \int_0^L \varepsilon_x dx = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_x}{E} \Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{M_i \times Y_c / I}{E} \Delta l \quad (3)$$

در این رابطه،  $\Delta_t$  میزان کاهش تار فوقانی،  $\varepsilon_x$  و  $\sigma_x$  به‌ترتیب کرنش و تنش در تار فوقانی تیر،  $E$  مدول الاستیسیته،  $M_i$  لنگر حاصل از تحلیل برای هر المان،  $\Delta l$  طول المان،  $Y_c$  عمق قسمت فشاری و  $I$  ممان اینرسی المان است.

شده است. در این قسمت، بخش عمده محاسبات مربوط به مدل نرم‌شوندگی کششی خطی است و روابط مربوط به سایر مدل‌ها در جداول پیوست، نشان داده خواهد شد.

### ۳-۱-۱-۳- روابط برای مدل نرم‌شوندگی کششی خطی

۳-۱-۱-۳- روابط محاسبه نیروها در مرحله اول (مقطع ترک نخورده)

در مرحله‌ی اول نیروی فشاری در مقطع با استفاده از رابطه کلی (۶) محاسبه می‌شود. به‌منظور ساده‌سازی، با جای‌گذاری رابطه (۷) در رابطه (۶)، نیروی فشاری در مقطع با استفاده از رابطه (۸) محاسبه می‌شود.

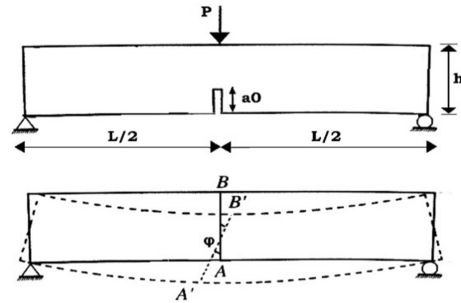
$$F_c = \int_0^{y_c} [f_c' \left( \frac{2\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right)^2] b dy \quad (6)$$

$$\frac{y_i}{Y_c} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1} \rightarrow \varepsilon_i = \frac{y_i}{Y_c} \times \varepsilon_1 \quad (7)$$

$$F_c = \int_0^{y_c} f_c' \left[ \left( \frac{2y_i \times \varepsilon_1}{Y_c \times \varepsilon_0} \right) - \left( \frac{y_i \times \varepsilon_1}{Y_c \times \varepsilon_0} \right)^2 \right] b dy \quad (8)$$

$$= f_c' \times b \left[ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} Y_c - \frac{Y_c}{3} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

رابطه (۴) برقرار است. همچنین میزان عرض ترک ( $w_0$ ) در تار تحتانی با فرض رابطه خطی کرنش‌ها در مقطع مطابق رابطه (۵) محاسبه خواهد شد. در این رابطه  $d$  ارتفاع تیر است. از فرضیات فوق می‌توان به‌طور مشابه برای تست خمش چهار نقطه‌ای نیز استفاده نمود.



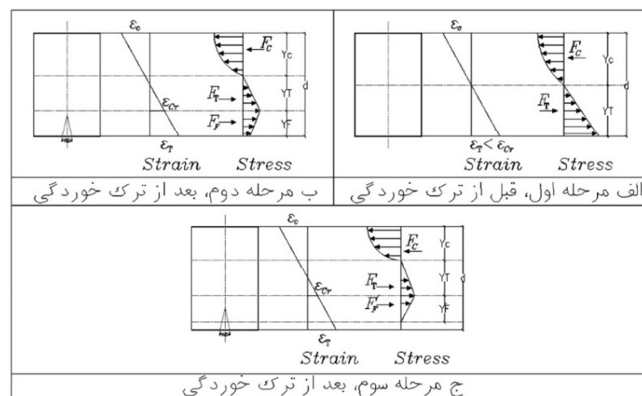
شکل ۵- مود شکست بتن الیافی در تست خمش سه نقطه‌ای

$$\theta = \frac{\Delta}{2 \times Y_c} \quad (4)$$

$$w_0 = 2 \times [\theta \times (d - Y_c)] \quad (5)$$

### ۳- روابط ریاضی برای محاسبه مقادیر نیرو در مقطع بحرانی

با در نظر گرفتن فرضیات ارائه شده در بخش پیشین، سه مرحله برای تنش‌های ایجاد شده در مقطع مطابق با شکل ۶ می‌توان متصور شد که در ادامه روابط مورد نیاز ارائه



شکل ۶- مراحل رفتاری یک نمونه الیافی تحت اثر خمش [۲۴]

همچنین نیروی کششی بتن در محدوده ترک‌نخورده با جای‌گذاری رابطه (۹) در رابطه (۱۰)، محاسبه می‌شود.

در این روابط،  $F_c$  نیروی فشاری،  $b$  عرض مقطع،  $\varepsilon_i$  کرنش نظیر هر تار،  $y_i$  موقعیت هر تار و  $\varepsilon_1$  کرنش حداکثر می‌باشد.



$$\frac{Y_T}{\varepsilon_{cr}} = \frac{Y_C}{\varepsilon_1} \rightarrow Y_T = \frac{f_t}{E_C \times \varepsilon_1} \times Y_C \quad (14)$$

در این رابطه،  $f_t$  تنش در محدوده ترک خورده و  $\varepsilon_{cr}$  کرنش نظیر ترک خوردگی است. در این حالت نیروی فشاری بتن از رابطه (۸) و نیروی کششی مقطع از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_T = \frac{f_t}{2} \times b \times Y_T = \frac{f_t^2}{2 \times E_C \times \varepsilon_1} \times Y_C \times b \quad (15)$$

نیرو در ناحیه ترک خورده با انتگرال‌گیری از نیروی الیاف  $F_F$  در طول ناحیه ترک خورده مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_F = \int_0^{Y_F} f_t \left(1 - \frac{w}{w_c}\right) b dy = \int_0^{Y_F} f_t \left(1 - \frac{2y\theta}{w_c}\right) b dy \quad (16)$$

$$= f_t \times b \times \left(Y_F - \frac{Y_F^2 \theta}{w_c}\right)$$

در این رابطه،  $Y_F$  عمق الیاف،  $w_c$  عرض ترک بحرانی و  $F_F$  نیروی الیاف در مرحله ب است.

در این حالت نیز با ارضای رابطه تعادل زیر، می‌توان محل تار خنثی را در یک کرنش فشاری مشخص محاسبه نمود.

$$F_C = F_F + F_T \quad (17)$$

ظرفیت خمشی مقطع نیز از رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود که در آن  $M_C$  و  $M_T$  با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۹) و  $M_F$  که لنگر ناشی از نیروی الیاف در مقطع ترک خورده است از رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود.

$$M_{Total} = M_T + M_C + M_F \quad (18)$$

$$M_T = F_T \times \frac{2 \times Y_T}{3} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{f_t^3}{(E_C \times \varepsilon_1)^2} \times Y_C^2 \times b$$

$$M_F = \int_0^{Y_F} f_t \left(1 - \frac{w}{w_c}\right) b y dy + F_T Y_T \quad (20)$$

$$= f_t \times b \times \left(\frac{Y_F^2}{2} - \frac{2 \times Y_F^3 \times \theta}{3 \times w_c}\right) + F_T Y_T$$

در این حالت با برقرار کردن تعادل در مقطع ( $F_C = F_T$ ) موقعیت تار خنثی در مقطع با عملیات سعی و خطا به دست می‌آید.

$$\frac{\varepsilon_T}{Y_T} = \frac{\varepsilon_1}{Y_C} \rightarrow \varepsilon_T = \frac{\varepsilon_1}{Y_C} \times (d - Y_C) \quad (9)$$

$$F_i = \int_0^{Y_T} \sigma_T b dy \quad (10)$$

$$= \frac{E_c}{2} \times \varepsilon_T \times b \times Y_T$$

$$= \frac{E_c}{2} \times \varepsilon_1 \times b \times \frac{(d - Y_C)^2}{Y_C}$$

در رابطه (۱۰)،  $Y_T$  عمق قسمت کششی،  $\varepsilon_T$  کرنش نهایی نظیر شکست کششی بتن،  $\sigma_T$  تنش کششی بتن،  $E_c$  مدول الاستیسیته بتن و  $F_i$  نیروی کششی مقطع می‌باشد.

بعد از مشخص شدن موقعیت تار خنثی، ظرفیت خمشی مقطع از رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود، که  $M_C$  و  $M_T$  به ترتیب لنگر ناشی از نیروهای فشاری و کششی در مقطع حول تار خنثی می‌باشند و از رابطه (۱۲) و (۱۳) محاسبه می‌شوند.

$$M_{Total} = M_T + M_C \quad (11)$$

$$M_C = \int_0^{Y_C} \sigma_c b \times Y dy \quad (12)$$

$$= \int_0^{Y_C} f_c \left[ \left( \frac{2y_i \times \varepsilon_1}{Y_C \times \varepsilon_0} \right) - \left( \frac{y_i \times \varepsilon_1}{Y_C \times \varepsilon_0} \right)^2 \right] b y_i dy$$

$$= f_c \times b \times \left[ \left( \frac{2Y_C^2 \times \varepsilon_1}{3 \times \varepsilon_0} \right) - \left( \frac{Y_C^2}{4} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \right]$$

$$M_T = F_T \times \frac{2}{3} \times (d - Y_C) \quad (13)$$

$$= \frac{E_c}{3} \times \varepsilon_1 \times b \times \frac{(d - Y_C)^3}{Y_C}$$

۲-۱-۳- روابط محاسبه نیروها در مرحله دوم (مقطع ترک نخورده کششی)

مرحله دوم زمانی آغاز می‌شود که تنش در تار تحتانی به مقاومت کششی رسیده باشد. مطابق با قسمت (ب) شکل ۶، می‌توان نوشت:

وضعیت تمام المان‌ها در مدل و بررسی همگرایی. این گام‌ها با جزییات در فلوجارت شکل ۷ نشان داده شده است. براساس روش‌های نمودی-تکراری، بار اعمال شده در ابتدا به تعدادی نمود کوچک تقسیم می‌شود و نمود جابه‌جایی در میان هر نمود بار براساس ماتریس سختی مماسی محاسبه می‌گردد.

نیروی مقاوم (نیروی داخلی اعضا) بر مبنای مقدار جابه‌جایی تجمعی محاسبه می‌گردد و مقدار نیروی نامتعادل براساس تفاوت بین بار اعمال شده و برآیند نیروی داخلی گرهی به دست می‌آید. هرگاه نرم اقلیدسی خطای مربوط به نیروی نامتعادل یا جابه‌جایی نامتعادل در یک مرز مشخصی قرار گیرد، همگرایی تضمین شده است و مقدار نیروهای اعضا و جابه‌جایی‌ها مقادیر صحیح خود را دارند. این روند به صورت تناوبی تکرار می‌شود و مسیر تعادل دنبال می‌گردد. معیار همگرایی براساس کنترل جابه‌جایی مطابق رابطه (۲۴) استفاده شده است:

$$\sqrt{\left\| \frac{\delta u_{new}}{u_{new}} \right\|} = \left( \frac{\sum_{i=1}^{dof} (\delta u_i)^2}{\sum_{i=1}^{dof} (u_i)^2} \right)^{0.5} \leq tol \quad (24)$$

در رابطه فوق،  $\delta u_{new}$  تغییرات جابه‌جایی در هر تکرار،  $u_{new}$  مقدار جابه‌جایی همگرا شده جدید و  $tol$  مقدار لازم برای همگرایی است.

با در نظر گرفتن روابط ارائه شده در بخش‌های ۱-۳ تا ۳-۳ می‌توان با رعایت گام‌های ارائه شده در روند نشان داده شده در شکل ۷ منحنی بار-تغییر مکان برای یک عضو بتن الیافی تحت اثر خمش را به دست آورد.

### ۳-۱-۳- روابط محاسبه نیروها در مرحله سوم (مقطع ترک خورده)

زمانی که کرنش تار فوقانی نمونه که تحت اثر فشار قرار دارد به مرز  $\epsilon_0$  برسد، لازم است براساس روابط (۲۱) تا (۲۳)، رابطه (۱۶) و رابطه (۲۰) به تناسب اصلاح شوند.

$$\frac{Y_F'}{w_c} = \frac{d - Y_C - Y_T}{w_{max}} \rightarrow \quad (21)$$

$$Y_F' = \frac{w_c}{w_{max}} \times (d - Y_C - Y_T)$$

$$F_F' = \int_0^{Y_F'} f_t \left(1 - \frac{2y\theta}{w_c}\right) b dy \quad (22)$$

$$= f_t \times b \times \left(Y_F' - \frac{Y_F'^2 \theta}{w_c}\right)$$

$$M_F' = \int_0^{Y_F'} f_t \left(1 - \frac{2y\theta}{w_c}\right) b y dy + F_F' Y_T \quad (23)$$

$$= f_t \times b \times \left(\frac{Y_F'^2}{2} - \frac{2 \times Y_F'^3 \times \theta}{3 \times w_c}\right) + F_F' Y_T$$

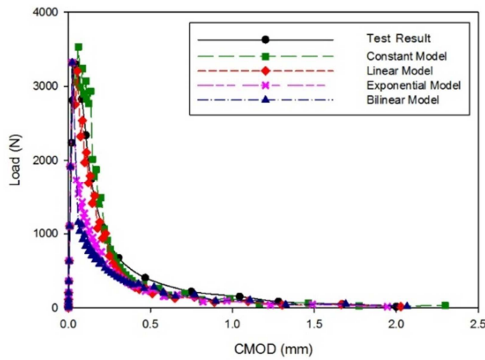
در این روابط،  $w_{max}$  عرض ترک حداکثر،  $Y_F'$  عمق الیاف در ناحیه ترک خورده،  $F_F'$  نیروی الیاف و  $M_F'$  لنگر الیاف در مرحله ج است.

در جداول پیوست، به صورت خلاصه، نیرو و لنگر مقطع برای سه حالت ثابت، نمایی و دوخطی در سه مرحله الف (قبل از ترک خوردگی)، ب و ج (بعد از ترک خوردگی) مطابق شکل ۶ ارائه شده است.

### ۳-۲- مراحل حل عددی

الگوریتم تحلیل غیرخطی شامل چهار گام اساسی است که عبارتند از: تشکیل ماتریس سختی موجود، حل معادلات تعادل برای محاسبه نمودهای جابه‌جایی، تعیین

الیافی نیز برابر ۰/۲۶۸ نیوتن بر میلی‌متر می‌باشد. الیاف بررسی شده در این آزمایش از نوع الیاف پلی‌پروپیلن با طول ۲۴ میلی‌متر و ضخامت ۲۵ میکرومتر است. در شکل ۸ مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی و مدل پیشنهادی ارائه شده نشان داده شده است.

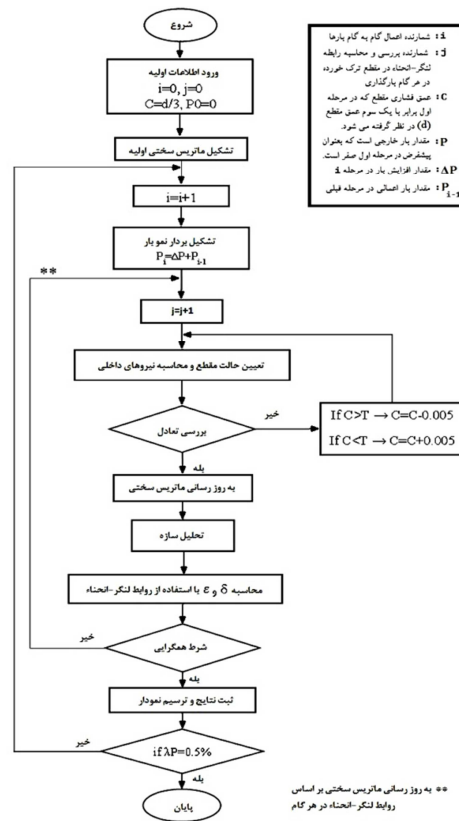


شکل ۸- اعتبارسنجی مدل با نتایج آزمایشگاهی سیفونتس و همکاران

۴-۲- اعتبارسنجی دو: مطالعه پارک کیونگ سو

در مطالعه پارک کیونگ سو<sup>۱۶</sup> از آزمایش تیر سه نقطه‌ای جهت تعیین منحنی نرم‌شوندگی بتن الیافی استفاده شده است [۴۶]. نمونه تحت آزمایش دارای عرض ۸۰، ارتفاع مقطع ۱۵۰، ارتفاع شکاف اولیه ۵۰ و طول دهانه ۶۰۰ میلی‌متر است. نمونه بتن الیافی دارای مقاومت فشاری ۲۶/۶۵، مدول الاستیسیته ۲۴۴۰۰ و مقاومت کششی ۳/۲۴ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. انرژی شکست برای نمونه بتن الیافی برابر ۰/۱۷۵ نیوتن بر میلی‌متر می‌باشد. الیاف بررسی شده در این آزمایش از نوع ورق فایبرگلاس به ابعاد ۱۵۰×۸۰ میلی‌متر و از رزین وینیل استر و اپوکسی در آن استفاده شده است. شکل ۹ مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی و مدل پیشنهادی ارائه شده نشان می‌دهد.

۴-۳- اعتبارسنجی سه: مطالعه احمد کیزلکانان



شکل ۷- روند گام‌به‌گام تعیین منحنی بار- تغییرمکان

۴-۴ اعتبارسنجی و نتایج

در این بخش، مدل پیشنهادی با برخی از نتایج آزمایشگاهی موجود اعتبارسنجی شده است. برای انجام این کار برای هر مقاله‌ای که معرفی می‌شود چهار مدل خطی، ثابت، نمایی و دوخطی بررسی شده است.

۴-۱- اعتبارسنجی یک: مطالعات سیفونتس و همکاران

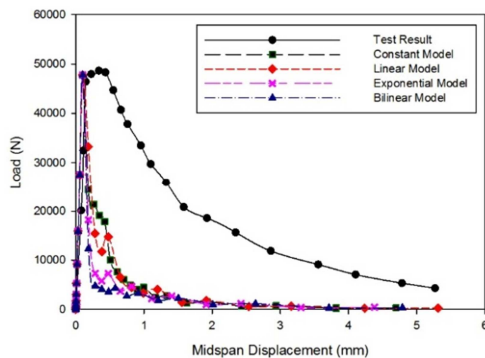
در مطالعه سیفونتس<sup>۱۵</sup> و همکاران از آزمایش تیر سه نقطه‌ای جهت تعیین منحنی نرم‌شوندگی بتن الیافی استفاده شده است [۴۵]. نمونه تحت آزمایش دارای عرض ۶۰، ارتفاع مؤثر ۱۱۴ و طول دهانه ۴۸۰ میلی‌متر است. همچنین، نمونه بتن الیافی دارای مقاومت فشاری ۳۷/۶، مدول الاستیسیته ۲۹۲۰۰ و مقاومت کششی ۲/۶۲ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. انرژی شکست برای نمونه بتن

<sup>16</sup>- Kyoungsoo Park

<sup>15</sup>- Cifuentes

#### ۴-۴- اعتبارسنجی چهارم: مطالعه کوری هارا و همکاران

در مطالعه کوری هارا<sup>۱۸</sup> و همکاران از آزمایش تیر سه نقطه‌ای جهت تعیین منحنی نرم‌شوندگی بتن الیافی استفاده شده است [۴۸]. نمونه تحت آزمایش دارای عرض ۱۰۰، ارتفاع مؤثر ۲۰۰ و طول دهانه ۶۰۰ میلی‌متر است. نمونه بتن الیافی دارای مقاومت فشاری ۶۶/۵، مدول الاستیسیته ۳۰۹۰۰ و مقاومت کششی ۵/۳۴ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. انرژی شکست برای نمونه بتن الیافی برابر ۳/۰۷ نیوتن بر میلی‌متر می‌باشد. الیاف بررسی شده در این آزمایش از نوع الیاف فولادی با انتهای صاف با طول ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۲ میکرومتر است. در شکل ۱۱ مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی و مدل پیشنهادی ارائه شده مشاهده می‌شود.

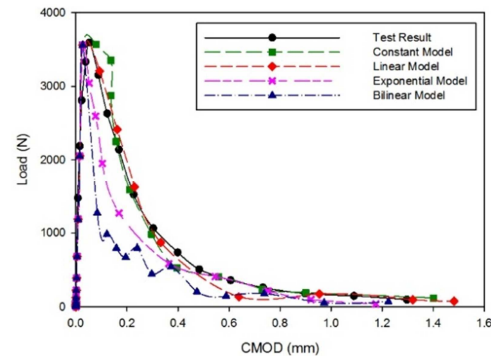


شکل ۱۱- اعتبارسنجی مدل با نتایج آزمایشگاهی کوری هارا و همکاران

#### ۴-۵- اعتبارسنجی پنجم: مطالعه مورثی و همکاران

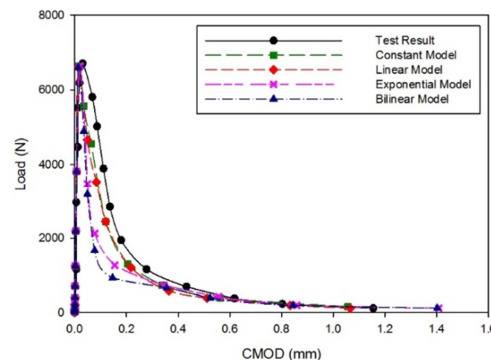
مورثی<sup>۱۹</sup> و همکاران از آزمایش تیر سه نقطه‌ای جهت تعیین منحنی نرم‌شوندگی بتن الیافی استفاده کردند [۴۹]. نمونه تحت آزمایش دارای عرض ۵۰، ارتفاع مؤثر ۴۵ و طول دهانه ۲۵۰ میلی‌متر است. نمونه بتن الیافی دارای مقاومت فشاری ۸۷/۷، مدول الاستیسیته ۳۷۹۰۰ و مقاومت کششی ۱۵/۴ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

در مطالعه احمد کیزیلکانات<sup>۱۷</sup> از آزمایش تیر سه نقطه‌ای جهت تعیین منحنی نرم‌شوندگی بتن الیافی استفاده شده است [۴۷].



شکل ۹- اعتبارسنجی مدل با نتایج آزمایشگاهی پارک کیونگ سو

نمونه تحت آزمایش دارای عرض ۱۰۰، ارتفاع مقطع ۱۰۰، ارتفاع شکاف اولیه ۳۰ و طول دهانه ۳۰۰ میلی‌متر است. نمونه بتن الیافی دارای مقاومت فشاری ۶۵/۱، مدول الاستیسیته ۴۳۲۰۰ و مقاومت کششی ۳/۹ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. انرژی شکست برای نمونه بتن الیافی برابر ۰/۱۶۸۷ نیوتن بر میلی‌متر می‌باشد. الیاف بررسی شده در این آزمایش از نوع الیاف کربن با طول ۱۲ میلی‌متر و ضخامت ۷ میکرومتر است. در شکل ۱۰ مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی و مدل پیشنهادی ارائه شده نشان داده شده است.



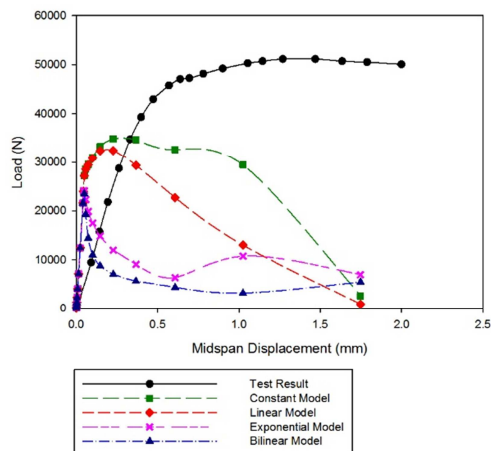
شکل ۱۰- اعتبارسنجی مدل با نتایج آزمایشگاهی احمد کیزیلکانات

<sup>18</sup>- Kurihara

<sup>19</sup>- Murthy

<sup>17</sup>- Ahmet B. Kizilkanat

بارگذاری در این مقاله  $3/33 \times 10^{-3}$  میلی‌متر بر ثانیه می‌باشد.



شکل ۱۳- اعتبارسنجی مدل با نتایج آزمایشگاهی ژانگ

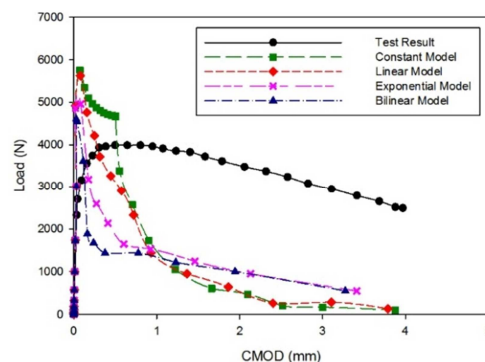
#### ۴-۷- بررسی نتایج

همانطور که در بخش‌های بالا مشاهده گردید، در تعدادی از آزمایشات استفاده از این روش، دارای تطبیق مناسب و در برخی دیگر نیز تطابق خوبی نداشته است. در حالت کلی، نمونه‌هایی که دارای سخت‌شدگی کرنشی هستند؛ در این روش، نتایج خوبی حاصل نمی‌گردد. این عدم تطابق می‌تواند به فرض اولیه که در آن توزیع بازشدگی عرض ترک در ارتفاع به صورت خطی در نظر گرفته شده است، مرتبط باشد. به نظر می‌رسد در نمونه‌هایی که دارای سخت‌شدگی کرنشی هستند، ترک در ارتفاع محدوده ترک‌خورده به صورت خطی نبوده و احتمالاً به صورت منحنی‌های درجه ۲ یا شبیه آن باشد. خطی در نظر گرفتن این بازشدگی باعث می‌شود مقدار تنش ایجاد شده در قسمت‌های ترک‌خورده از مقدار واقعی آن کمتر شود و این منجر به برآورد مقدار لنگر و اختلاف با نتایج آزمایشگاهی شود.

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، یک روش مشخص تحلیلی با هدف دقت مناسب جهت پیش‌بینی رفتار خمشی بتن الیافی در آزمایش خمش سه نقطه‌ای ارائه شد. در این روش با استفاده

انرژی شکست برای نمونه بتن الیافی برابر  $6/19$  نیوتن بر میلی‌متر می‌باشد. الیاف بررسی شده در این آزمایش از نوع الیاف فولادی با انتهای صاف با طول ۱۳ میلی‌متر و ضخامت  $1/8$  میکرومتر است. در شکل ۱۲ مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی و مدل پیشنهادی ارائه شده نشان داده شده است.



شکل ۱۲- اعتبارسنجی مدل با نتایج آزمایشگاهی مورثی و همکاران

همکاران

#### ۴-۶- اعتبارسنجی شش: مطالعه ژانگ

ژانگ<sup>۲۰</sup> در مطالعات خود از آزمایش تیر سه نقطه‌ای جهت تعیین منحنی نرم‌شوندگی بتن الیافی استفاده شده است [۵۰]. نمونه تحت آزمایش دارای عرض ۱۵۰، ارتفاع مؤثر ۱۲۵ و طول دهانه ۵۰۰ میلی‌متر است. نمونه بتن الیافی دارای مقاومت فشاری ۹۲، مدول الاستیسیته ۳۵۰۰۰ و مقاومت کششی ۵/۱ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. انرژی شکست برای نمونه بتن الیافی برابر  $4/521$  نیوتن بر میلی‌متر می‌باشد. الیاف بررسی شده در این آزمایش از نوع الیاف فولادی با انتهای قلاب‌دار با طول ۵۰ میلی‌متر و ضخامت  $7/5$  میکرومتر است. در شکل ۱۳ مقایسه بین نتایج آزمایشگاهی و مدل پیشنهادی ارائه شده نشان داده شده است. در این مقاله، اثر سرعت بارگذاری در آزمایش تیر سه نقطه‌ای بررسی شده است. در این قسمت ما از نتایج کمترین سرعت بارگذاری استفاده می‌کنیم. کمترین سرعت

<sup>20</sup>- Zhang

آمده نشان‌دهنده این است که استفاده از این مدل‌ها برای بتن‌های با نرم‌شوندگی تنشی کاهش یافته و کم‌الیاف تطابق مناسبی دارد. علاوه بر آن، مدل ارائه شده با برخی از نتایج آزمایشگاهی که در آنها نرم‌شدگی قابل‌ملاحظه نمی‌باشد، تطابق و پیش‌بینی مناسبی نشان می‌دهد و این نشان می‌دهد برای استفاده از این روش لازم است در فرضیات مسئله از جمله توسعه روابط لنگر-انحنای و یا نحوه محاسبه عرض ترک تغییراتی را به‌وجود آورد. توصیه می‌شود برای ارزیابی رفتار نمونه‌های الیافی که نرم‌شدگی در آنها قابل‌ملاحظه نمی‌باشد، در توسعه روابط لنگر-انحنای از توزیع ترک بازشدگی با منحنی‌های درجه ۲ یا شبیه آن استفاده شود.

از اجزای محدود یک‌بعدی، رفتار خمشی تحت اثر بار مرحله‌ای شبیه‌سازی گردید. جهت اعمال اثرات ترک‌خوردگی در تحلیل غیرخطی تیر، در هرگام ابتدا میزان تغییرشکل تار فوقانی تیر محاسبه شده و برای المان بحرانی (المان میانی) متناسب با لنگر ایجاد شده و تغییر طول تار فوقانی تیر، با استفاده از روابط لنگر-انحنای که در آن اثرات ترک‌خوردگی مقطع وارد می‌شود، سختی و مقاومت المان بحرانی در هرگام محاسبه شد. در نهایت، روند گام‌به‌گام تحلیل غیرخطی جهت تعیین منحنی بار-تغییر مکان نشان داده شد. همچنین مقایسه‌ای بین چهار مدل نرم‌شوندگی کششی شامل مدل‌های ثابت، خطی، نمایی و دوخطی در رفتار خمشی مقطع مستطیلی صورت گرفت. نتایج به‌دست

## مراجع

- [1] Mobasher, B., & Shah, S. P. (1989). "Test parameters for evaluating toughness of glass-fiber reinforced concrete panels", *ACI Materials Journal*, 86(5), 448-458.
- [2] Mobasher, B., & Li, C.Y. (1996). "Mechanical properties of hybrid cement-based composites", *ACI Mater Journal*, 93, 284-292.
- [3] Li, V. C. (2000). "Large Volume, High-Performance Applications of Fibers in Civil Engineering", *High Performance Application of Fibers*, 83(3), 660-686.
- [4] Stang, H., & Li, V. (2004). "Classification of Fiber Reinforced Cementitious Material for Structural Application", *6th RILEM Symposium of FRC*, Italy.
- [5] Banthia, N., & Trottier, J.F. (1995). "Test methods for flexural toughness characterization of fiber reinforced concrete: Some concerns and proposition", *ACI Mater Journal*, 92, 48-57.
- [6] Van Mier, J. G. M., & Van Vliet, M. A. A. (2001). "Uniaxial tensile Test of Determination of Fracture Parameters of Concrete: State of the art", *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2), 235-247.
- [7] Vandewalle, L., Nemegeer, D., Balazs, L., Barr, B., Barros, J., Bartos, P., ... & Falkner, H. (2003). "RILEM TC 162-TDF: Test and design methods for steel fibre reinforced concrete'-sigma-epsilon-design method-Final Recommendation", *Materials and Structures*, 36(262), 560-567..
- [8] Zhang, J., & Stange, H. (1997). "Applications of Stress crack Opening Width Relationship in Predicting the Flexural Behavior of Fiber Reinforced Concrete", *Cement and Concrete research*, 28(3), 439-452.
- [9] Abdalla H. M., & Karihaloo, B. L. (2004). "A method for constructing the bilinear tension softening diagram of concrete corresponding to its true fracture energy", *Magazine of Concrete Research*, 56(10), 597-604.
- [10] Jepsen, M. S., Damkilde, L., Lövgren, I., & Berrocal, C. (2018). "Adaptive inverse analysis (AIA) applied and verified on various fiber reinforced concrete composites", *Materials and Structures*, 51(3), 60.
- [11] Jepsen, M. S., Damkilde, L., & Lövgren, I. (2016). "A fully general and adaptive inverse analysis method for cementitious materials", *Materials and Structures*, 49(10), 4335-4348.
- [12] Soranakom, C., & Mobasher, B. (2008). "Correlation of tensile and flexural responses of strain softening and strain hardening cement composites", *Cement and Concrete Composite*, 30(6), 465-477.
- [13] Mobasher, B., Yao, Y., & Soranakom, C. (2015). "Analytical solutions for flexural design of hybrid steel fiber reinforced concrete beams", *Engineering Structures*, 100, 164-177.
- [14] Barros, J. A. O., Taheri, M., & Salehian, H. (2015). "A model to simulate the moment-rotation and crack width of FRC members reinforced with longitudinal bars", *Engineering Structures*, 100, 43-56.
- [15] Amin, A., & Foster, S. J. (2016). "Predicting the flexural response of steel fiber reinforced concrete prisms using a sectional model", *Cement and Concrete Composites*, 67, 1-11.
- [16] Yoo, D.-Y., Banthia, N., & Yoon, Y.-S. (2016). "Predicting the flexural behavior of ultra-high-performance fiber-reinforced concrete", *Cement and Concrete Composites*, 74, 71-87.

- [17] Chiranjeevi Reddy, K., & Subramaniam, K. V. L. (2017). "Analysis for multi-linear stress-crack opening cohesive relationship: Application to macro-synthetic fiber reinforced concrete", *Engineering Fracture Mechanics*, 169, 128-145.
- [18] Nguyen, D. L., Thai, D. K., & Kim, D. J. (2017). "Direct tension-dependent flexural behavior of ultra-high-performance fiber-reinforced concretes", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 52(2), 121-134.
- [19] Yao, Y., Bakhshi, M., Nasri, V., & Mobasher, B. (2018). "Interaction diagrams for design of hybrid fiber-reinforced tunnel segments", *Materials and Structures*, 51(1), 35.
- [20] Dey, V., & Mobasher, B. (2018). "Quantitative characterization of accelerated aging in cement composites using flexural inverse analysis", *Cement and Concrete Composites*, 89, 181-191.
- [21] Armelin, H. S., & Banthia, N. (1997). "Predicting the flexural post cracking performance of steel fiber reinforced concrete from the pullout of single fibers", *ACI Materials Journal*, 94(1), 18-31.
- [22] Oh, B. H., Kim, J. C., & Choi, Y. C. (2007). "Fracture behavior of concrete members reinforced with structural synthetic fibers", *Engineering Fracture Mechanics*, 74(1), 243-257.
- [23] Prudencio, L., Austin, S., Jones, P., Armelin, H., & Robins, P. (2006). "Prediction of steel fiber reinforced concrete under flexure from an inferred fiber pull-out response", *Materials and Structures Journal*, 39(6), 601-610.
- [24] PEER/ATC 72-1 (2010), "Modeling and acceptance criteria for seismic design and analysis of tall building". Applied Technology Council, report, 201 Redwood Shores Pkwy, Suite 240 Redwood City, California 94065.
- [25] Sharifi, M., & Kamali, M. (2017). "Evaluating the Concrete Tensions Softening Model in Flexural Behavior", *International Journal of Civil Engineering*, 15(5), 791-807.
- [26] Kwak, H. G., & Kim, S. P. (2002). "Nonlinear analysis of RC beams based on moment-curvature relation". *Computers & Structures*, 80(7), 615-628.
- [27] Vandewalle, L. (2002). "Test and design methods for steel fiber reinforced concrete. Design of steel fibre reinforced using  $\sigma$ -w method: principles and applications", *Materials and Structures*, 35(249), 262-278.
- [28] De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J., & Verhoosel, C. V. (2012). *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons.
- [29] Ahmadi, R., Ghoddousi, P., & Sharifi, M. (2012). "A simple solution for prediction of steel fiber reinforced concrete behavior under flexure", *International Journal of Civil Engineering*, 10(4), 274-279.
- [30] Hillerborg, A., Modéer, M., & Petersson, P. E. (1976). "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, 6(6), 773-781.
- [31] Figueiras, J. A., & Owen, D. R. J. (1984). "Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Shell Structures", *Intl. conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Part I, Split, Yugoslavia*, 509-532.
- [32] Ballarini, R., Shah, S. P., & Keer, L. M. (1984). "Crack growth in cement-based composites", *Engineering Fracture Mechanics*, 20(3), 433-445.
- [33] Reinhardt, H. W. (1985). "Crack softening zone in plain concrete under static loading", *Cement and Concrete Research*, 15(1), 42-52.
- [34] Gopalaratnam, V. S., & Surendra, P. S. (1985). "Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension", *Journal Proceedings*, 82(3), 310-323.
- [35] Cedolin, L., Poli Sandro, D., & Iori, I. (1987). "Tensile Behavior of Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, 113(3), 431-449.
- [36] Foote, R. M. L., Mai, Y.-W., & Cotterell, B. (1986). "Crack growth resistance curves in strain-softening materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(6), 593-607.
- [37] Du, J. J., Yon, J. H., Hawkins, N. M., & Kobayashi, A. S. (1990). "Analysis of the fracture process zone of a propagating concrete crack using moire interferometry, in micromechanics of failure of quasi-brittle material", *Elsevier Applied Science*, 146-155.
- [38] Hordijk, D. A. (1991). "Local approach to fatigue of concrete", PhD thesis, Technical University of Delft
- [39] Roelfstra, R. E., & Wittmann, F. H. (1986). "A numerical method to link strain softening with fracture in concrete, fracture toughness and fracture energy in concrete", *Elsevier*, Amsterdam, 163-175.
- [40] Liaw, B. M., Jeang, F. L., Du, J. J., Hawkins, N. M., & Kobayashi, A. S. (1990). "Improved Nonlinear Model for Concrete Fracture", *Journal of Engineering Mechanics*, 116(2), 429-445.
- [41] CEB-FIP Model Code. (1993). Comité Euro-International du Béton. Bulletin d'Informacion, Lausanne, 213/214.
- [42] Kang, S. T., Lee, Y., Park, Y. D., & Kim, J. K. (2010). "Tensile fracture properties of an Ultra High Performance Fiber Reinforced Concrete (UHPFRC) with steel fiber", *Composite Structures*, 92(1), 61-71.
- [43] Kamal, M. M., Safan, M. A., Etman, Z. A., & Abdelbaki, M. A. (2015). "Effect of steel fibers on the properties of recycled self-compacting concrete in fresh and hardened state", *International Journal of Civil Engineering*, 13(4), 400-410.
- [44] Reinhardt, H. W. (1984). "Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete", Stevin-Laboratory, Department of Civil Engineering, Delft Institute of Technology, Delft.
- [45] Cifuentes, H., García, F., Maeso, O., & Medina, F. (2013). "Influence of the properties of polypropylene fibers on the fracture behavior of low-, normal- and high-strength FRC", *Construction and Building Materials*, 45, 130-137.

- [46] Park, K., Ha, K., Choi, H., & Lee, C. (2015). "Prediction of interfacial fracture between concrete and fiber reinforced polymer (FRP) by using cohesive zone modeling", *Cement and Concrete Composites*, 63, 122-131.
- [47] Kizilkanat, A. (2016). "Experimental Evaluation of Mechanical Properties and Fracture Behavior of Carbon Fiber Reinforced High Strength Concrete", *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 60(2), 289-296.
- [48] Kurihara, N., Kunieda, M., Kamada, T., Uchida, Y., & Rokugo, K. (2000). "Tension softening diagrams and evaluation of properties of steel fiber reinforced concrete", *Engineering Fracture Mechanics*, 65(2), 235-245.
- [49] Murthy, A., Karihaloo, B. L., Iyer, N. R., & Raghu Prasad, B. K. (2013). "Bilinear tension softening diagrams of concrete mixes corresponding to their size-independent specific fracture energy", *Construction and Building Materials*, 47, 1160-1166.
- [50] Zhang, X. X., Abdelazim, A. M., Ruiz, G., & Yu, R. C. (2014). "Fracture behavior of steel fiber-reinforced concrete at a wide range of loading rates", *International Journal of Impact Engineering*, 71, 89-96.



## پیوست

جدول ۱- روابط نیرو و لنگر برای مدل ثابت در حالات مختلف [۲۴]

حالت	رابطه	ناحیه
الف، ب، ج	نیروی فشاری: $F_c = f_c' \times b \left[ \frac{\epsilon_1 Y_c}{\epsilon_0} - \frac{Y_c}{3} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right)^2 \right]$ لنگر فشاری: $M_c = f_c' \times b \left[ \left( \frac{2Y_c^2 \times \epsilon_1}{3 \times \epsilon_0} \right) - \left( \frac{Y_c^2}{4} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right)^2 \right) \right]$	بلوک فشاری
الف	نیروی کششی: $F_t = \frac{E_c}{2} \times \epsilon_1 \times b \times \frac{(d - Y_c)^2}{Y_c}$ لنگر کششی: $M_T = \frac{E_c}{3} \times \epsilon_1 \times b \times \frac{(d - Y_c)^3}{Y_c}$	بلوک کششی در قسمت ترک نخورده
ب، ج	نیروی کششی: $F_T = \frac{f_t}{2} \times b \times Y_T = \frac{f_t^2}{2 \times E_c \times \epsilon_1} \times Y_c \times b$ لنگر کششی: $M_T = \frac{1}{3} \times \frac{f_t^3}{(E_c \times \epsilon_1)^2} \times Y_c^2 \times b$	
ب	نیروی الیاف: $F_F = f_t \times b \times Y_F$ لنگر الیاف: $M_F = (f_t \times b \times \frac{Y_F^2}{2}) + F_F Y_T$	بلوک کششی در قسمت ترک خورده
ج	نیروی الیاف: $F_F' = f_t \times b \times Y_F'$ لنگر الیاف: $M_F' = (f_t \times b \times \frac{Y_F'^2}{2}) + F_F' Y_T$	

جدول ۲- روابط نیرو و لنگر برای مدل نمایی در حالات مختلف [۲۴]

حالت	رابطه	ناحیه
الف، ب، ج	نیروی فشاری: $F_c = f_c' \times b \left[ \frac{\epsilon_1 Y_c}{\epsilon_0} - \frac{Y_c}{3} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right)^2 \right]$ لنگر فشاری: $M_c = f_c' \times b \left[ \left( \frac{2Y_c^2 \times \epsilon_1}{3 \times \epsilon_0} \right) - \left( \frac{Y_c^2}{4} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right)^2 \right) \right]$	بلوک فشاری
الف	نیروی کششی: $F_t = \frac{E_c}{2} \times \epsilon_1 \times b \times \frac{(d - Y_c)^2}{Y_c}$ لنگر کششی: $M_T = \frac{E_c}{3} \times \epsilon_1 \times b \times \frac{(d - Y_c)^3}{Y_c}$	بلوک کششی در قسمت ترک نخورده
ب، ج	نیروی کششی: $F_T = \frac{f_t}{2} \times b \times Y_T = \frac{f_t^2}{2 \times E_c \times \epsilon_1} \times Y_c \times b$ لنگر کششی: $M_T = \frac{1}{3} \times \frac{f_t^3}{(E_c \times \epsilon_1)^2} \times Y_c^2 \times b$	
ب	نیروی الیاف: $F_F = f_t \times b \times \left[ Y_F - \left[ \frac{0.952 \times w_c}{\theta} \times \left( \frac{Y_F \times \theta}{w_c} \right)^{1.248} \right] \right]$ لنگر الیاف: $M_F = f_t \times b \left\{ \frac{Y_F^2}{2} + \left[ \frac{0.432 \times w_c^2}{\theta^2} \times \left( \frac{Y_F \times \theta}{w_c} \right)^{2.248} \right] - \left[ \frac{0.952 \times w_c \times Y_F}{\theta} \times \left( \frac{Y_F \times \theta}{w_c} \right)^{1.248} \right] \right\} + F_F Y_T$	بلوک کششی در قسمت ترک خورده
ج	نیروی الیاف: $F_F' = f_t \times b \times \left[ Y_F' - \left[ \frac{0.952 \times w_c}{\theta} \times \left( \frac{Y_F' \times \theta}{w_c} \right)^{1.248} \right] \right]$ لنگر الیاف: $M_F' = f_t \times b \left\{ \frac{Y_F'^2}{2} + \left[ \frac{0.432 \times w_c^2}{\theta^2} \times \left( \frac{Y_F' \times \theta}{w_c} \right)^{2.248} \right] - \left[ \frac{0.952 \times w_c \times Y_F'}{\theta} \times \left( \frac{Y_F' \times \theta}{w_c} \right)^{1.248} \right] \right\} + F_F' Y_T$	

جدول ۳- روابط نیرو و لنگر برای مدل دوخطی در حالات مختلف [۲۴]

حالت	رابطه	ناحیه
الف، ب، ج	نیروی فشاری: $F_c = f_c' \times b \left[ \frac{\epsilon_1 Y_c}{\epsilon_0} - \frac{Y_c}{3} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right)^2 \right]$ لنگر فشاری: $M_c = f_c' \times b \left[ \left( \frac{2Y_c^2 \times \epsilon_1}{3 \times \epsilon_0} \right) - \left( \frac{Y_c^2}{4} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right)^2 \right) \right]$	بلوک فشاری
الف	نیروی کششی: $F_t = \frac{E_c}{2} \times \epsilon_1 \times b \times \frac{(d - Y_c)^2}{Y_c}$ لنگر کششی: $M_T = \frac{E_c}{3} \times \epsilon_1 \times b \times \frac{(d - Y_c)^3}{Y_c}$	بلوک کششی در قسمت ترک نخورده
ب، ج	نیروی کششی: $F_T = \frac{f_t}{2} \times b \times Y_T = \frac{f_t^2}{2 \times E_c \times \epsilon_1} \times Y_c \times b$ لنگر کششی: $M_T = \frac{1}{3} \times \frac{f_t^3}{(E_c \times \epsilon_1)^2} \times Y_c^2 \times b$	
ب	نیروی ییاف: $F_F = f_t \times b \times \left\{ \left[ \left( \frac{(\beta - 1)\theta\alpha}{w_c} - \frac{(1 + \alpha)\theta\beta}{w_c} \right) \times Y_F^2 \right] + [(\alpha + \beta) \times Y_F] \right\}$ لنگر ییاف: $M_F = f_t \times b \times \left\{ \left[ \left( \frac{2(\beta - 1)\theta\alpha^2}{3w_c} + \frac{2(1 - \alpha^3)\theta\beta}{3(\alpha - 1)w_c} \right) \times Y_F^3 \right] + \left[ \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta(\alpha + 1)}{2} \right) \times Y_F^2 \right] \right\}$	بلوک کششی در قسمت ترک خورده
ج	نیروی ییاف: $F_F' = f_t \times b \times \left\{ \left[ \left( \frac{(\beta - 1)\theta\alpha}{w_c} - \frac{(1 + \alpha)\theta\beta}{w_c} \right) \times Y_F'^2 \right] + [(\alpha + \beta) \times Y_F'] \right\}$ لنگر ییاف: $M_F' = f_t \times b \times \left\{ \left[ \left( \frac{2(\beta - 1)\theta\alpha^2}{3w_c} + \frac{2(1 - \alpha^3)\theta\beta}{3(\alpha - 1)w_c} \right) \times Y_F'^3 \right] + \left[ \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta(\alpha + 1)}{2} \right) \times Y_F'^2 \right] \right\}$	